

Probar que una ecuación tiene una raíz en un intervalo

CÓDIGO

MAT-CAL 1.9-G1

NIVEL

● Genérico

TIEMPO ESTIMADO

5-10 min por versión por versión

TEMA

1.9 · Continuidad en intervalos y Teorema del Valor Intermedio

QUÉ EVALÚA ESTE ARQUETIPO

Que el estudiante aplique el Teorema del Valor Intermedio para garantizar que una ecuación tiene al menos una solución en un intervalo.

🕒 Pista ➖ Frontera ⚠ Cuidado 🔑 Clave ☐ Control ↗ Conexión

1 RECONOCE *Identificación del problema · ¿Qué tipo de problema es este?*

Este tipo de problema aparece cuando te piden mostrar que existe una solución de una ecuación en un intervalo, sin necesidad de encontrarla: por ejemplo, que $\cos x = x$ tiene una solución en $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Se espera que pases todo a un lado, compruebes la continuidad y encuentres un cambio de signo, aunque la ecuación no se pueda resolver con álgebra.

🕒 PISTAS

- Aparecen frases como «muestra que la ecuación tiene al menos una solución en (a, b) ».
- La ecuación no se puede despejar fácilmente (mezcla polinomios, trigonométricas, exponenciales o logaritmos).

➖ FRONTERAS

- Si se pregunta si se cumplen las hipótesis del teorema o qué garantiza: ve a «Justificar si se cumplen las hipótesis del Teorema del Valor Intermedio» (1-T2).
- Si se pide el valor aproximado de la raíz: ve a «Método de Newton» (3.11-G1).

↗ CONEXIÓN Prerrequisito: «Hallar los intervalos donde una función es continua» (1.8-G3).

2 ORGANIZA *Datos iniciales · ¿Qué tengo y qué me piden?*

Escribe la ecuación y pásalo todo a un lado: la función auxiliar es $h(x) = (\text{lado izquierdo}) - (\text{lado derecho})$. Anota el intervalo $[a, b]$ y calcula $h(a)$ y $h(b)$. Define qué se pide: demostrar que existe una solución, o encontrar un intervalo que la contenga.

☐ CONTROL ¿ $h(a)$ y $h(b)$ tienen signos opuestos? Si no, prueba otro intervalo.

3 ACTIVA Fórmulas o conceptos clave · ¿Qué herramientas necesito?

Concepto y fórmula	Aplicación aquí
Teorema del Valor Intermedio Si f es continua en $[a, b]$ y k está estrictamente entre $f(a)$ y $f(b)$, existe $c \in (a, b)$ con $f(c) = k$	Garantiza que se alcanza cada valor intermedio.
Versión para raíces Si h es continua en $[a, b]$ y $h(a)h(b) < 0$, existe $c \in (a, b)$ con $h(c) = 0$	Caso más usado.

↗ CONEXIÓN Ficha teórica, tema 1.9: Teorema del Valor Intermedio.

4 RESUELVE Resolución paso a paso · ¿Qué hago y en qué orden?

A · INICIO LÓGICO

1. Pasa todo a un lado y llama $h(x)$ a esa expresión: la ecuación queda $h(x) = 0$.

B · PROCESO TÉCNICO

2. Verifica que h es continua en todo $[a, b]$.

⚠ CUIDADO Si h tiene una asíntota, un salto o un punto fuera de su dominio dentro de $[a, b]$, el teorema no se aplica.

3. Evalúa $h(a)$ y $h(b)$.

🔑 CLAVE Continuidad + cambio de signo garantizan la raíz, aunque no sepas dónde está exactamente.

C · VALIDACIÓN Y CONCLUSIÓN

4. Comprueba el cambio de signo.

☐ CONTROL ¿ $h(a)h(b) < 0$? Sí: aplica el teorema. No: busca otro intervalo.

5. Concluye citando el Teorema del Valor Intermedio.

5 COMPRUEBA Verificación final · ¿Tiene sentido lo que obtuve?

- ¿Pasaste todo a un lado antes de evaluar?
- ¿Justificaste la continuidad en todo $[a, b]$?
- ¿Los valores $h(a)$ y $h(b)$ están bien calculados?
- ¿Una gráfica muestra el cruce con el eje x ?
- ¿Citaste el teorema en la conclusión?

No necesitas encontrar la raíz: basta con una función continua que cambie de signo.

7 PRACTICA Práctica aplicada · cinco versiones

Versión 1 Muestra que $x^3 + x - 1 = 0$ tiene una solución en $[0, 1]$.

Directa

Versión 2 Muestra que $\cos x = x$ tiene una solución en $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Trigonometría

Versión 3 Muestra que $\ln x = 3 - 2x$ tiene una solución en $[1, 2]$.

Logaritmo

Versión 4 Encuentra un intervalo de longitud 1 que contenga una raíz de $x^4 + x - 3 = 0$.

Incógnita invertida

Versión 5 ★ Muestra que $2^x = x^2$ tiene una solución en $(-1, 0)$.

Más exigente

TRABAJA ESTE ARQUETIPO EN LÍNEA

Video de resolución y plantilla imprimible de **1.9-G1**. Escanea el código o entra a **metodoeresolverapi-do.com/m1** y busca el código **1.9-G1**.



CLAVE DE RESPUESTAS

1.9-G1 Probar que una ecuación tiene una raíz en un intervalo

1. $h(x) = x^3 + x - 1$ es continua (polinomio); $h(0) = -1 < 0$ y $h(1) = 1 > 0$.
2. $h(x) = \cos x - x$ es continua; $h(0) = 1 > 0$ y $h\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{2} < 0$.
3. $h(x) = \ln x + 2x - 3$ es continua en $[1, 2]$; $h(1) = -1 < 0$ y $h(2) = \ln 2 + 1 > 0$.
4. Con $h(x) = x^4 + x - 3$: $h(1) = -1$ y $h(2) = 15$, luego sirve $[1, 2]$ (también $[-2, -1]$).
5. $h(x) = 2^x - x^2$ es continua en $[-1, 0]$; $h(-1) = -\frac{1}{2} < 0$ y $h(0) = 1 > 0$, luego hay una raíz en $(-1, 0)$.