

Demostrar un límite con la definición formal (ε - δ , ε - N o M - δ)

CÓDIGO

MAT-CAL 1.5-T1

NIVEL

■ Teórico

TIEMPO ESTIMADO

15-20 min por versión

TEMA

1.5 · Definición formal de límite

QUÉ EVALÚA ESTE ARQUETIPO

Que el estudiante construya y redacte una demostración formal de un límite con la definición (ε - δ , ε - N o M - δ).

🕒 Pista 🚫 Frontera ⚠️ Cuidado 🔑 Clave 📁 Control ➡️ Conexión

1 RECONOCE *Identificación del problema · ¿Qué tipo de problema es este?*

Este tipo de problema aparece cuando te piden **demostrar** con la definición que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$, es decir, para **cualquier** $\varepsilon > 0$; por ejemplo, «demuestra que $\lim_{x \rightarrow 3} (4x - 5) = 7$ ». Incluye sus variantes: un límite infinito (para todo $M > 0$ hallas δ) o un límite al infinito (para todo $\varepsilon > 0$ hallas N). Se espera que encuentres δ (o N) y redactes la prueba, aunque haya que acotar un factor que depende de x .

🕒 PISTAS

- Aparecen «demuestra», «prueba» o «usa la definición» (ε - δ , ε - N , M - δ) con una función **concreta**.
- No se da un valor numérico de ε (o de M): la prueba debe valer para todos.

🚫 FRONTERAS

- Si se da un **valor numérico** de ε : ve a «Encontrar δ para un ε dado» (1.5-G1).
- Si se pide demostrar que el límite **no existe**: ve a «Demostrar que un límite no existe» (1-T1).
- Si la afirmación es **general** (funciones f y g cualesquiera): ve a «Demostrar o refutar una afirmación general sobre límites o continuidad» (1-T3).

➡️ **CONEXIÓN** Prerrequisito: «Encontrar δ para un ε dado» (1.5-G1). Es el mismo cálculo, pero hecho una sola vez para todo $\varepsilon > 0$.

2 ORGANIZA *Datos iniciales · ¿Qué tengo y qué me piden?*

Antes de empezar, escribe tres cosas. La **hipótesis**: la función $f(x)$, el punto a y el valor L . La **tesis**, que es lo que hay que demostrar: para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$ (o la variante ε - N o M - δ que corresponda). Y las **herramientas** que podrías necesitar: factorizar $|x - a|$, acotar un factor o usar la desigualdad triangular. Define también qué se pide: la demostración completa o solo la expresión de δ en función de ε .

📁 **CONTROL** ¿Separaste el **borrador** (buscar δ) de la **prueba** (verificar δ)? Si no, hazlo en dos partes.

3 ACTIVA Fórmulas o conceptos clave · ¿Qué herramientas necesito?

Concepto y fórmula	Aplicación aquí
Definición ε-δ $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : 0 < x - a < \delta \Rightarrow f(x) - L < \varepsilon$	Es lo que la prueba debe establecer.
Acotación de un factor $ x - a < 1 \Rightarrow x + c \leq x - a + a + c < 1 + a + c $	Controla factores que dependen de x (desigualdad triangular).
Mínimo $\delta = \min\left(1, \frac{\varepsilon}{K}\right)$	K es la cota del factor: δ cumple a la vez la restricción y la estimación.
Límite infinito $\forall M > 0 \exists \delta > 0 : 0 < x - a < \delta \Rightarrow f(x) > M$	Definición de $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$.
Límite al infinito $\forall \varepsilon > 0 \exists N : x > N \Rightarrow f(x) - L < \varepsilon$	Definición de $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$; misma estrategia, con N en lugar de δ .

↗ CONEXIÓN Ficha teórica, tema 1.5: Definición formal de límite.

4 RESUELVE Resolución paso a paso · ¿Qué hago y en qué orden?

A · ANÁLISIS (BORRADOR)

1. **Escribe** $|f(x) - L|$ y factoriza para que aparezca $|x - a|$ (en las variantes, parte de $f(x) > M$ o de $|f(x) - L| < \varepsilon$).
2. **Acota** el factor restante si depende de x (restringe $|x - a| < 1$).

B · CONSTRUCCIÓN DE LA PRUEBA

3. **Elige** δ en función de ε .

🔑 **CLAVE** δ se **descubre** en el borrador y se **verifica** en la prueba: la prueba empieza con «Sea $\varepsilon > 0$; tomemos $\delta = \dots$ ».

4. **Redacta** la cadena: si $0 < |x - a| < \delta$, entonces $|f(x) - L| = \dots < \varepsilon$.

⚠ **CUIDADO** δ puede depender de ε , pero **nunca** de x .

C · REVISIÓN

5. **Revisa** cada desigualdad de la cadena.

☐ **CONTROL** ¿Cada paso está justificado y la cadena termina en «menor que ε »? Si es así, la prueba está completa.

6. **Concluye** con «por lo tanto, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ ».

5 COMPRUEBA Verificación final · ¿Tiene sentido lo que obtuve?

- ¿La prueba empieza fijando un $\varepsilon > 0$ cualquiera?
- ¿ δ depende solo de ε (y de a)?
- ¿Cada desigualdad de la cadena está justificada?
- ¿Probaste tu δ con un ε concreto (por ejemplo, 0,1)?
- ¿Terminaste con la conclusión formal?

6 RECUERDA Tip final · ¿Qué no debo olvidar?

Una demostración ε - δ tiene **dos momentos**: en el borrador buscas δ trabajando hacia atrás; en la prueba lo verificas hacia adelante.

7 PRACTICA Práctica aplicada · cinco versiones

Versión 1 Demuestra que $\lim_{x \rightarrow 3} (4x - 5) = 7$.

Directa (lineal)

Versión 2 Demuestra con la definición que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = \infty$.

Límite infinito

Versión 3 Demuestra que $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = 4$.

Función con hueco

Versión 4 Demuestra con la definición que $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$.

Límite al infinito

Versión 5 ★ Demuestra que $\lim_{x \rightarrow 3} x^2 = 9$.

Más exigente

TRABAJA ESTE ARQUETIPO EN LÍNEA

Video de resolución y plantilla imprimible de **1.5-T1**. Escanea el código o entra a **metodoresolverapi-do.com/m1** y busca el código **1.5-T1**.



CLAVE DE RESPUESTAS

1.5-T1 Demostrar un límite con la definición formal (ε - δ , ε - N o M - δ)

1. $|(4x - 5) - 7| = 4|x - 3|$, luego $\delta = \varepsilon/4$.
2. Dado $M > 0$: $\frac{1}{x^2} > M \iff 0 < |x| < \frac{1}{\sqrt{M}}$, luego $\delta = \frac{1}{\sqrt{M}}$.
3. Para $x \neq 2$ la expresión es $x + 2$, así que $|f(x) - 4| = |x - 2|$: $\delta = \varepsilon$.
4. Dado $\varepsilon > 0$, toma $N = \frac{1}{\varepsilon}$: si $x > N$, entonces $\left| \frac{1}{x} - 0 \right| = \frac{1}{x} < \varepsilon$.

5. $|x^2 - 9| = |x - 3| |x + 3|$; con $|x - 3| < 1$ se tiene $|x + 3| < 7$, luego $\delta = \min\left(1, \frac{\varepsilon}{7}\right)$.