

Límite que se reduce a $\frac{\sin(u)}{u}$ o a $\frac{1 - \cos u}{u}$

CÓDIGO

MAT-CAL 1.4-G1

NIVEL

● Genérico

TIEMPO ESTIMADO

5-10 min por versión

TEMA

1.4 · Límites trigonométricos

QUÉ EVALÚA ESTE ARQUETIPO

Que el estudiante transforme una indeterminación trigonométrica $0/0$ en los límites fundamentales $\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin u}{u} = 1$ y $\lim_{u \rightarrow 0} \frac{1 - \cos u}{u} = 0$.

🕒 Pista 🚫 Frontera ⚠️ Cuidado 🔑 Clave 📁 Control ➡️ Conexión

1 RECONOCE Identificación del problema · ¿Qué tipo de problema es este?

Este tipo de problema aparece cuando, al sustituir $x = a$, obtienes $0/0$ y el cero viene de un **seno, coseno o tangente**: por ejemplo, $\frac{\sin(5x)}{x}$ en $x = 0$. Se espera que ajustes la expresión para que aparezca $\frac{\sin u}{u}$ o $\frac{1 - \cos u}{u}$ con $u \rightarrow 0$, aunque el argumento no sea simplemente x o haya que cambiar de variable ($u = x - a$).

🕒 PISTAS

- Al sustituir $x = a$ obtienes $0/0$.
- Aparece $\sin(kx)$, $\text{tg}(kx)$ o $1 - \cos(kx)$ con $x \rightarrow 0$, o una función trigonométrica que vale 0 en $x = a$.

🚫 FRONTERAS

- Si $x \rightarrow \infty$ (por ejemplo, $\frac{\sin x}{x}$ con $x \rightarrow \infty$), no es este arquetipo: ve a «Teorema del emparedado» (1.3-G6).
- Si al sustituir **no** obtienes $0/0$ (por ejemplo, $\frac{\sin x}{x}$ con $x \rightarrow \frac{\pi}{2}$): ve a «Límite por sustitución directa» (1.3-G1).

➡️ CONEXIÓN Prerrequisito: identidades trigonométricas básicas (Precálculo).

2 ORGANIZA Datos iniciales · ¿Qué tengo y qué me piden?

Anota la expresión $f(x)$, el punto a y el argumento u que tiende a 0 (directamente, o con $u = x - a$). Si no hay ningún argumento que tienda a 0, revisa las fronteras.

⚠️ CUIDADO $\frac{\sin(5x)}{x}$ **no** se simplifica como «sen 5»: el 5 está dentro del seno.

3 ACTIVA Fórmulas o conceptos clave · ¿Qué herramientas necesito?

Concepto y fórmula	Aplicación aquí
Límite fundamental del seno $\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin u}{u} = 1$	Base de todo el arquetipo.
Límite del coseno $\lim_{u \rightarrow 0} \frac{1 - \cos u}{u} = 0$	Para expresiones con $1 - \cos u$.
Tangente $\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\tan u}{u} = 1$	Sale del límite del seno, porque $\frac{\tan u}{u} = \frac{\sin u}{u} \cdot \frac{1}{\cos u}$.
Identidad útil $(1 - \cos u)(1 + \cos u) = \sin^2 u$	Para transformar $\frac{1 - \cos u}{u^2}$.

↗ **CONEXIÓN** Ficha teórica, tema 1.4: Límites trigonométricos.

4 RESUELVE Resolución paso a paso · ¿Qué hago y en qué orden?

A · INICIO LÓGICO

1. **Sustituye** $x = a$ y confirma la forma $0/0$.
2. **Identifica** el argumento u de cada función trigonométrica; si no tiende a 0, cambia de variable ($u = x - a$).

B · PROCESO TÉCNICO

3. **Ajusta** la expresión multiplicando y dividiendo para que cada $\sin u$ quede dividido entre el mismo u .

🔑 **CLAVE** El denominador debe coincidir *exactamente* con el argumento del seno: $\sin(5x)$ necesita $5x$ debajo.

4. **Separa** la expresión en factores con límites conocidos.
5. **Aplica** los límites fundamentales y calcula.

C · VALIDACIÓN Y CONCLUSIÓN

6. **Revisa** el resultado. ¿Todos los factores tienen límite conocido? Multiplica. ¿No? Reescribe con identidades.
7. **Concluye** con el valor del límite.

5 COMPRUEBA Verificación final · ¿Tiene sentido lo que obtuve?

- ¿Cada $\sin u$ quedó dividido exactamente entre u ?
- ¿Compensaste las constantes que agregaste?
- ¿Trabajaste en radianes?
- ¿Una tabla con x cerca de a confirma el valor?
- ¿Simplificaste el resultado?

6 RECUERDA Tip final · ¿Qué no debo olvidar?

Ante 0/0 con trigonometría, **fabrica el** $\frac{\sin u}{u}$: lo que multiplicas abajo, lo compensas arriba.

7 PRACTICA Práctica aplicada · cinco versiones

Versión 1 Calcula $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(5x)}{x}$.

Directa

Versión 2 Calcula $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{\sin(7x)}$.

Dos senos

Versión 3 Calcula $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$.

Con coseno

Versión 4 Calcula $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}(2x)}{x}$.

Tangente

Versión 5 ★ Calcula $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x}{x - \pi}$ (usa $u = x - \pi$).

Más exigente

TRABAJA ESTE ARQUETIPO EN LÍNEA

Video de resolución y plantilla imprimible de **1.4-G1**. Escanea el código o entra a **metodoresolverapi-do.com/m1** y busca el código **1.4-G1**.



CLAVE DE RESPUESTAS

1.4-G1 Límite que se reduce a $\sin(u)/u$ o a $(1 - \cos u)/u$

1. 5.
2. $\frac{3}{7}$.
3. $\frac{1}{2}$ (multiplica arriba y abajo por $1 + \cos x$).
4. 2.
5. -1, porque $\sin x = -\sin(x - \pi)$.