

Teorema del emparedado

CÓDIGO NIVEL TIEMPO ESTIMADO

MAT-CAL 1.3-G6 ● Genérico

10 min por versión

TEMA

1.3 · Cálculo algebraico de límites

QUÉ EVALÚA ESTE ARQUETIPO

Que el estudiante use cotas y el teorema del emparedado cuando las técnicas algebraicas no sirven.

 Pista
  Frontera
  Cuidado
  Clave
  Control
  Conexión

1 RECONOCE *Identificación del problema · ¿Qué tipo de problema es este?*

Este tipo de problema suele aparecer cuando una función que **oscila pero está acotada** —como $\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ o $\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ — se multiplica por otra que **tiende a 0**, o cuando te dan dos funciones que encierran a f ; por ejemplo, $\lim_{x \rightarrow 0} x \cos\left(\frac{1}{x}\right)$. Se espera que construyas las cotas y concluyas, aunque el límite del factor oscilante no exista.

🕒 PISTAS

- Aparece $\sin$ o $\cos$ de un argumento que no tiene límite (por ejemplo, $\frac{1}{x}$ o $\frac{1}{x^2}$ cuando $x \rightarrow 0$, o x cuando $x \rightarrow \infty$).
- Ese factor está multiplicado por otro que tiende a 0 (x , x^2 , $\sqrt{x}$...).
- El enunciado da desigualdades del tipo $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$.

⊖ FRONTERAS

- Si falta el factor que tiende a 0 (por ejemplo, $\lim_{x \rightarrow 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$), no es este arquetipo: el límite no existe. Ve a «Demostrar que un límite no existe» (1-T1).
- Si aparece $\frac{\sin x}{x}$ con $x \rightarrow 0$, no es este arquetipo: ve a «Límite que se reduce a $\sin(u)/u$ o a $(1 - \cos u)/u$ » (1.4-G1).

↗ CONEXIÓN Prerrequisito: acotación de seno y coseno, $-1 \leq \sin u \leq 1$.

2 ORGANIZA *Datos iniciales · ¿Qué tengo y qué me piden?*

Anota el factor acotado y sus cotas, el factor que tiende a 0, el punto a y, si el enunciado las da, las cotas g y h con $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$. Pregúntate: ¿tienes, o puedes construir, dos cotas que tiendan al *mismo* valor? Si no, revisa las fronteras.

3 ACTIVA Fórmulas o conceptos clave · ¿Qué herramientas necesito?

Concepto y fórmula	Aplicación aquí
Teorema del emparedado Si $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ para x cerca de a ($x \neq a$) y $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = L$, entonces $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$	Obtiene el límite de f a partir de dos cotas. Vale también para límites laterales y para $x \rightarrow \pm\infty$.
Cota de seno y coseno $-1 \leq \sin u \leq 1, -1 \leq \cos u \leq 1$	Punto de partida de las cotas.
Versión con valor absoluto Si $ f(x) \leq g(x)$ y $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$, entonces $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$	Evita problemas de signo.

↪ **CONEXIÓN** Ficha teórica, tema 1.3: Cálculo algebraico de límites.

4 RESUELVE Resolución paso a paso · ¿Qué hago y en qué orden?

A · INICIO LÓGICO

1. **Identifica** el factor acotado y el factor que tiende a 0.
2. **Escribe** la cota básica del factor acotado (por ejemplo, $-1 \leq \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1$).

B · PROCESO TÉCNICO

3. **Multiplica** la desigualdad por el otro factor para encerrar a f .

⚠ **CUIDADO** Si ese factor puede ser negativo, las desigualdades se invierten: usa valor absoluto.

4. **Calcula** el límite de cada cota.

🔑 **CLAVE** Las dos cotas deben tender al *mismo* valor; si no, el teorema no concluye nada.

C · VALIDACIÓN Y CONCLUSIÓN

5. **Aplica** el teorema. ¿Ambas cotas tienen el mismo límite? Ese es el límite de f . ¿No? Busca otras cotas.
6. **Concluye** citando el teorema del emparedado.

5 COMPRUEBA Verificación final · ¿Tiene sentido lo que obtuve?

- ¿Las cotas son válidas para todos los x cercanos a a ?
- ¿Revisaste el signo del factor al multiplicar?
- ¿Las dos cotas tienen el mismo límite?
- ¿Una gráfica o una tabla muestra a f encerrada entre las cotas?
- ¿Citaste el teorema en la conclusión?

Cuando un factor **oscila sin control** pero está acotado, no intentes calcular su límite: **enciérralo** y deja que el otro factor lo lleve a cero.

Versión 1 Calcula $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$.

Directa

Versión 2 Calcula $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} e^{\sin(\pi/x)}$.

Otra función

acotada

Versión 3 Calcula $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x}$.

$x \rightarrow \infty$

Versión 4 Si $4x - 9 \leq f(x) \leq x^2 - 4x + 7$ para $x \geq 0$, calcula $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$.

Cotas dadas

Versión 5 ★ Calcula $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \llbracket 1/x \rrbracket$, donde $\llbracket \cdot \rrbracket$ es la parte entera.

Más exigente

TRABAJA ESTE ARQUETIPO EN LÍNEA

Video de resolución y plantilla imprimible de **1.3-G6**. Escanea el código o entra a **metodoresolverapi-do.com/m1** y busca el código **1.3-G6**.



CLAVE DE RESPUESTAS

1.3-G6 Teorema del emparedado

1. 0, porque $-x^2 \leq x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq x^2$.
2. 0, porque $e^{-1}\sqrt{x} \leq \sqrt{x} e^{\sin(\pi/x)} \leq e\sqrt{x}$.
3. 0, porque $-\frac{1}{x} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{x}$ para $x > 0$.
4. 7: ambas cotas son continuas y valen 7 en $x = 4$.
5. 1: como $\frac{1}{x} - 1 < \llbracket 1/x \rrbracket \leq \frac{1}{x}$, para $x > 0$ se tiene $1 - x < x \llbracket 1/x \rrbracket \leq 1$.