

Límites no rutinarios

CÓDIGO

MAT-CAL 1-X2

NIVEL

★ Desafío

TIEMPO ESTIMADO

15–20 min por versión por versión

TEMA

Límites y continuidad (arquetipo del módulo)

QUÉ EVALÚA ESTE ARQUETIPO

Que el estudiante use heurísticas (cambio de variable, patrones, acotación, reescritura) cuando ninguna plantilla se aplica directamente.

🕒 Pista 🚫 Frontera ⚠️ Cuidado 🔑 Clave ☐ Control ➡️ Conexión

1 RECONOCE *Identificación del problema · ¿Qué tipo de problema es este?*

Este tipo de problema suele aparecer cuando un límite no se resuelve con una sola técnica conocida: exponentes generales, raíces de distinto índice, parte entera o combinaciones poco habituales. Se espera que lo transformes hasta reconocer un tipo conocido, incluso si hay que probar varios caminos. Ejemplo mínimo: $\lim_{x \rightarrow 64} \frac{\sqrt{x} - 8}{\sqrt[3]{x} - 4}$, que se resuelve con $u = \sqrt[6]{x}$.

🕒 PISTAS

- Ninguna plantilla G encaja al primer intento.
- Aparecen exponentes generales (x^n), raíces de índices distintos, parte entera o combinaciones de funciones trigonométricas.
- Hay que construir la función desde una figura: la posición límite de un punto o una razón de longitudes o áreas.

🚫 FRONTERAS

- Si una plantilla G encaja directamente: ve a esa plantilla (temas 1.3, 1.4 o 1.7).
- Si el límite tiene parámetros que ajustar: ve a «Hallar parámetros para que un límite exista y tenga un valor dado» (1-X1).

➡️ CONEXIÓN Las heurísticas llevan siempre a alguna plantilla conocida: 1.3, 1.4, 1.3-G6 o 1.7.

2 ORGANIZA *Datos iniciales · ¿Qué tengo y qué me piden?*

Escribe el límite (con $x \rightarrow _$) y la forma que aparece al sustituir. Elige las heurísticas que vas a probar: cambio de variable, patrón, reescribir con límites conocidos o acotar. Define qué se pide: el valor del límite.

☐ CONTROL ¿Probaste primero las plantillas G y confirmaste que ninguna encaja?

3 ACTIVA Fórmulas o conceptos clave · ¿Qué herramientas necesito?

Concepto y fórmula	Aplicación aquí
Cambio de variable $u = g(x)$, con $u \rightarrow g(a)$ si g es continua en a	Convierte raíces o exponentes en polinomios.
Suma geométrica $x^n - 1 = (x - 1)(x^{n-1} + \dots + x + 1)$	Factoriza potencias generales.
Límites conocidos $\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin u}{u} = 1$ y $\lim_{u \rightarrow 0} \frac{1 - \cos u}{u^2} = \frac{1}{2}$	Piezas para reescribir.
Emparedado Si $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ y g y h tienden a L , entonces f tiende a L	Para parte entera y oscilaciones.

↗ CONEXIÓN Fichas teóricas, temas 1.3, 1.4 y 1.7.

4 RESUELVE Resolución paso a paso · ¿Qué hago y en qué orden?

A · EXPLORA

1. **Sustituye** e identifica la forma indeterminada.
2. **Prueba** casos particulares ($n = 2$, $n = 3$) o valores numéricos para intuir el resultado.

B · ELIGE UNA ESTRATEGIA

3. **Elige** una heurística: cambio de variable, patrón, reescritura o acotación.

🔑 **CLAVE** El objetivo de toda heurística es transformar el problema en uno que ya sabes resolver.

4. **Aplica** la heurística y resuelve con la plantilla conocida.

⚠ **CUIDADO** Al cambiar de variable, cambia también hacia dónde tiende la nueva variable.

C · VERIFICA

5. **Compara** con la estimación numérica de la fase A.

❏ **CONTROL** ¿Coinciden? Sí: listo. No: revisa la transformación o prueba otra heurística.

6. **Concluye** con el valor y la heurística usada.

5 COMPRUEBA Verificación final · ¿Tiene sentido lo que obtuve?

- ¿Hiciste una estimación numérica antes de resolver?
- ¿Cambiaste bien el límite de la nueva variable?
- ¿La transformación es algebraicamente correcta?
- ¿El resultado coincide con la estimación?
- ¿Nombraste la heurística usada?

En un desafío, no hay receta: explora, conjetura y transforma hasta que aparezca un tipo conocido.

7 PRACTICA Práctica aplicada · cinco versiones

Versión 1 Calcula $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n - 1}{x - 1}$ para n entero positivo.

Patrón

Versión 2 Calcula $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x} - 1}{x}$ (usa $u = \sqrt[3]{1+x}$).

Cambio de variable

Versión 3 El punto $P = (t, 2t^2)$ se mueve sobre la parábola $y = 2x^2$ hacia el origen O . La mediatriz del segmento OP corta al eje y en Q . ¿A qué punto tiende Q cuando $t \rightarrow 0$?

Configuración
geométrica

Versión 4 Calcula $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{sen} x}{x^3}$.

Trigonometría
combinada

Versión 5 ★ Calcula $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt{x} - 1}$ (usa $u = \sqrt[6]{x}$).

Más exigente

TRABAJA ESTE ARQUETIPO EN LÍNEA

Video de resolución y plantilla imprimible de **1-X2**. Escanea el código o entra a **metodoresolverapi-do.com/m1** y busca el código **1-X2**.



CLAVE DE RESPUESTAS

1-X2 Límites no rutinarios

1. n : tras la suma geométrica quedan n términos, y cada uno vale 1 en $x = 1$.
2. $\frac{1}{3}$: con $x = u^3 - 1$ y $u \rightarrow 1$, $\frac{u - 1}{u^3 - 1} = \frac{1}{u^2 + u + 1} \rightarrow \frac{1}{3}$.
3. El punto medio de OP es $(\frac{t}{2}, t^2)$ y la pendiente de la mediatriz es $-\frac{1}{2t}$, luego $Q = (0, t^2 + \frac{1}{4})$ y $Q \rightarrow (0, \frac{1}{4})$.
4. $\frac{1}{2}$, porque $\frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{sen} x}{x^3} = \frac{\operatorname{sen} x}{x} \cdot \frac{1 - \cos x}{x^2} \cdot \frac{1}{\cos x}$.
5. $\frac{2}{3}$: con $u = \sqrt[6]{x}$, $\frac{u^2 - 1}{u^3 - 1} = \frac{u + 1}{u^2 + u + 1} \rightarrow \frac{2}{3}$.