

Demostrar o refutar una afirmación general sobre límites o continuidad

CÓDIGO

MAT-CAL 1-T3

NIVEL

■ Teórico

TIEMPO ESTIMADO

15–20 min por versión por versión

TEMA

Límites y continuidad (arquetipo del módulo)

QUÉ EVALÚA ESTE ARQUETIPO

Que el estudiante decida si una afirmación general (sin una función concreta) es verdadera, y la demuestre con la definición o con teoremas ya probados, o la refute con un contraejemplo.

 Pista
  Frontera
  Cuidado
  Clave
  Control
  Conexión

1 RECONOCE Identificación del problema · ¿Qué tipo de problema es este?

Este tipo de problema suele aparecer cuando el enunciado habla de funciones cualesquiera —«si $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existe y..., entonces...», «¿es cierto que...?», verdadero o falso— y no da ninguna fórmula. Se espera que decidas si la afirmación es verdadera; si lo es, que la demuestres con la definición ε - δ o con teoremas ya probados; si no, que la refutes con un contraejemplo sencillo. Ejemplo mínimo: «si f y g son continuas en a , entonces $f + g$ es continua en a ».

PISTAS

- El enunciado habla de f y g generales, sin fórmula: «si..., entonces...», «demuestra que», «¿verdadero o falso?».
- Se trata de una propiedad: unicidad del límite, leyes de los límites, conservación del signo, continuidad de $|f|$ o de $f + g$, una caracterización.

FRONTERAS

- Si hay una función concreta y se pide demostrar su límite: ve a «Demostrar un límite con la definición formal (ε - δ , ε - N o M - δ)» (1.5-T1).
- Si se pide demostrar que el límite de una función concreta no existe: ve a «Demostrar que un límite no existe» (1-T1).
- Si se pregunta si se cumplen las hipótesis del TVI o qué garantiza en una situación dada: ve a «Justificar si se cumplen las hipótesis del Teorema del Valor Intermedio» (1-T2).

 CONEXIÓN Usa la definición ε - δ (1.5-T1), las leyes de los límites (tema 1.3) y la definición de continuidad (tema 1.8).

2 ORGANIZA Datos iniciales · ¿Qué tengo y qué me piden?

Separa la **hipótesis** (lo que se supone) de la **tesis** (lo que se afirma). Anota tu decisión (verdadera: demostrar; falsa: contraejemplo) y la herramienta que usarás: la definición ε - δ , leyes o teoremas, o la desigualdad triangular.

 CONTROL ¿Probaste la afirmación con dos o tres funciones sencillas (una constante, x , $\frac{|x|}{x}$, $\frac{1}{x}$) antes de decidir?

3 ACTIVA Fórmulas o conceptos clave · ¿Qué herramientas necesito?

Concepto y fórmula	Aplicación aquí
Definición ε-δ $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : 0 < x - a < \delta \Rightarrow f(x) - L < \varepsilon$	Base de las demostraciones.
Desigualdad triangular $ u + v \leq u + v $ y $ u - v \leq u - v $	Separa errores y compara valores absolutos.
Recurso $\varepsilon/2$ Si $ f(x) - L < \frac{\varepsilon}{2}$ y $ g(x) - M < \frac{\varepsilon}{2}$, entonces $ f(x) + g(x) - (L + M) < \varepsilon$	Combina dos límites.
Contraejemplos útiles $\frac{ x }{x}$ (salto); $\frac{1}{x}$ (no acotada); $\sin \frac{1}{x}$ (oscila); 1 en racionales y 0 en irracionales	Refutan afirmaciones falsas.

↗ CONEXIÓN Ficha teórica, temas 1.3, 1.5 y 1.8.

4 RESUELVE Resolución paso a paso · ¿Qué hago y en qué orden?

A · ANÁLISIS (BORRADOR)

1. **Escribe** la hipótesis y la tesis, y prueba la afirmación con funciones sencillas.
2. **Decide** si es verdadera o falsa.

⚠ **CUIDADO** Un ejemplo que cumple la afirmación no la demuestra; en cambio, un solo contraejemplo basta para refutarla.

B · CONSTRUCCIÓN DE LA PRUEBA

3. **Si es verdadera**, demuéstrela con la definición o con teoremas ya probados; **si es falsa**, construye el contraejemplo y comprueba que cumple la hipótesis y no la tesis.

🔑 **CLAVE** Una afirmación general se demuestra para todas las funciones que cumplen la hipótesis, o se refuta con un caso concreto: primero decide cuál de los dos caminos tomar.

C · REVISIÓN

4. **Revisa** que usaste todas las hipótesis (o que el contraejemplo las cumple todas).

☐ **CONTROL** ¿Cada paso está justificado por una definición, un teorema o una desigualdad?

5. **Concluye**: «la afirmación es verdadera (falsa) porque...».

5 COMPROBEA Verificación final · ¿Tiene sentido lo que obtuve?

- ¿Separaste hipótesis y tesis?
- ¿Probaste casos sencillos antes de decidir?
- ¿La demostración vale para todas las funciones de la hipótesis?
- ¿El contraejemplo cumple la hipótesis y falla la tesis?
- ¿Concluiste con una frase?

6 RECUERDA Tip final · ¿Qué no debo olvidar?

Ante una afirmación general: prueba primero con ejemplos sencillos; si resiste, demuéstrela; si falla, un contraejemplo basta.

7 PRACTICA Práctica aplicada · cinco versiones

Versión 1 ¿Verdadero o falso? Si $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)]$ existe, entonces existen $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$.

Verdadero o falso

Versión 2 Demuestra que si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ y $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = M$, entonces $L = M$.

Unicidad

Versión 3 Demuestra que si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$, entonces $\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = |L|$. ¿Es cierto el recíproco?

Valor absoluto

Versión 4 Demuestra que si f es continua en a y $f(a) > 0$, entonces $f(x) > 0$ en algún intervalo abierto que contiene a a .

*Conservación del
signo*

Versión 5 ★ Demuestra que si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ y $|g(x)| \leq M$ cerca de a (con $M > 0$), entonces $\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = 0$. Úsalo para calcular $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x}$.

Más exigente

TRABAJA ESTE ARQUETIPO EN LÍNEA

Video de resolución y plantilla imprimible de **1-T3**. Escanea el código o entra a **metodoresolverapi-do.com/m1** y busca el código **1-T3**.



CLAVE DE RESPUESTAS

1-T3 Demostrar o refutar una afirmación general sobre límites o continuidad

1. Falso: con $f(x) = \frac{|x|}{x}$ y $g(x) = -\frac{|x|}{x}$ en $a = 0$, $f + g = 0$ tiene límite, pero ni f ni g lo tienen.
2. Si $L \neq M$, toma $\varepsilon = \frac{|L - M|}{2}$. Con el menor de los dos δ , para $0 < |x - a| < \delta$ se tiene $|L - M| \leq |L - f(x)| + |f(x) - M| < 2\varepsilon = |L - M|$: contradicción.
3. $||f(x)| - |L|| \leq |f(x) - L| < \varepsilon$ con el mismo δ . El recíproco es falso en general (sí vale si $L = 0$): con $f(x) = \frac{|x|}{x}$, $|f(x)| = 1 \rightarrow 1$, pero $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x}$ no existe.
4. Con $\varepsilon = \frac{f(a)}{2}$ existe $\delta > 0$ tal que, si $|x - a| < \delta$, entonces $f(x) > f(a) - \frac{f(a)}{2} = \frac{f(a)}{2} > 0$.
5. $|f(x)g(x)| \leq M|f(x)| < \varepsilon$ si $|f(x)| < \frac{\varepsilon}{M}$. Con $f(x) = x$ y $g(x) = \sin \frac{1}{x}$, $|g(x)| \leq 1$: el límite es 0.