

Justificar si se cumplen las hipótesis del Teorema del Valor Intermedio

CÓDIGO

MAT-CAL 1-T2

NIVEL

■ Teórico

TIEMPO ESTIMADO

10–15 min por versión por versión

TEMA

Límites y continuidad (arquetipo del módulo)

QUÉ EVALÚA ESTE ARQUETIPO

Que el estudiante revise las hipótesis del Teorema del Valor Intermedio en una situación dada y explique qué garantiza el teorema y qué no.

🕒 Pista 🚧 Frontera ⚠️ Cuidado 🔑 Clave 📁 Control ➡️ Conexión

1 RECONOCE *Identificación del problema · ¿Qué tipo de problema es este?*

Este tipo de problema suele aparecer cuando la pregunta es sobre el propio teorema: si el Teorema del Valor Intermedio (TVI) se puede aplicar, por qué parece fallar o qué garantiza exactamente. Se espera que revises cada hipótesis y argumentos, incluso si la conclusión del teorema parece cumplirse (o no) por otras razones. Ejemplo mínimo: $\operatorname{tg} x$ cambia de signo en $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$ pero no se anula en ese intervalo; ¿contradice el TVI?

🕒 PISTAS

- Aparecen preguntas como «¿contradice esto el TVI?», «¿qué garantiza el teorema?» o «¿se puede aplicar?».
- La función tiene una discontinuidad en el intervalo, o el valor pedido no está entre $f(a)$ y $f(b)$.

🚧 FRONTERAS

- Si se pide aplicar el teorema para probar que una ecuación concreta tiene una raíz: ve a «Probar que una ecuación tiene una raíz en un intervalo» (1.9-G1).
- Si se pide demostrar una afirmación general (para toda f que cumpla ciertas condiciones), aunque el TVI sea la herramienta: ve a «Demostrar o refutar una afirmación general sobre límites o continuidad» (1-T3).

➡️ CONEXIÓN Prerrequisito: «Probar que una ecuación tiene una raíz en un intervalo» (1.9-G1).

2 ORGANIZA *Datos iniciales · ¿Qué tengo y qué me piden?*

Escribe las **hipótesis** del TVI (f continua en $[a, b]$; k entre $f(a)$ y $f(b)$) y su **tesis** (existe $c \in (a, b)$ con $f(c) = k$). Después describe la situación del problema y define qué se pide: si el teorema se aplica, qué garantiza, o una demostración.

📁 CONTROL ¿Revisaste cada hipótesis por separado?

⚠️ CUIDADO Si una hipótesis falla, el teorema no dice nada: la conclusión puede cumplirse o no.

3 ACTIVA Fórmulas o conceptos clave · ¿Qué herramientas necesito?

Concepto y fórmula	Aplicación aquí
Teorema del Valor Intermedio Si f es continua en $[a, b]$ y k está estrictamente entre $f(a)$ y $f(b)$, existe $c \in (a, b)$ con $f(c) = k$	Garantiza existencia, no unicidad ni ubicación.
Lógica de un teorema hipótesis $\Rightarrow$ tesis; sin las hipótesis, la tesis no está garantizada	Base de la argumentación.

↪ **CONEXIÓN** Ficha teórica, tema 1.9: Teorema del Valor Intermedio.

4 RESUELVE Resolución paso a paso · ¿Qué hago y en qué orden?

A · ANÁLISIS (BORRADOR)

1. **Escribe** las hipótesis y la tesis del teorema.
2. **Revisa** cada hipótesis en la situación del problema.

B · CONSTRUCCIÓN DE LA PRUEBA

3. **Argumenta** qué hipótesis se cumple o falla y por qué.

↪ **CLAVE** El teorema garantiza la tesis solo si todas las hipótesis se cumplen; si alguna falla, no afirma nada.

4. **Construye** un ejemplo o contraejemplo si hace falta.

C · REVISIÓN

5. **Revisa** la lógica de tu argumento.

□ **CONTROL** ¿Distinguiste «el teorema no se aplica» de «la conclusión es falsa»? Sí: correcto.

6. **Concluye** con una frase que diga qué garantiza (o no) el teorema.

5 COMPRUEBA Verificación final · ¿Tiene sentido lo que obtuve?

- ¿Revisaste la continuidad en todo el intervalo cerrado?
- ¿Comprobaste si k está entre $f(a)$ y $f(b)$?
- ¿Distinguiste «no se aplica» de «es falso»?
- ¿Tu contraejemplo cumple lo que dices?
- ¿La conclusión es una frase completa?

Un teorema es un contrato: si se cumplen las hipótesis, entrega la tesis. Si no se cumplen, no promete nada.

Versión 1 <i>Directa</i>	$f(x) = \frac{1}{x}$ cumple $f(-1) = -1$ y $f(1) = 1$, pero no tiene raíces. ¿Contradice el TVI?
Versión 2 <i>Parte entera</i>	¿Existe c en $[0, 2]$ con $\llbracket c \rrbracket = 0,5$? ¿Por qué no se aplica el TVI?
Versión 3 <i>¿Qué garantiza?</i>	f es continua en $[0, 1]$, $f(0) = 2$ y $f(1) = 5$. ¿Garantiza el TVI un c con $f(c) = 3$? ¿Y con $f(c) = 6$?
Versión 4 <i>Signos iguales</i>	Si f es continua en $[a, b]$ y $f(a)f(b) > 0$, ¿puede tener raíces en (a, b) ? Da un ejemplo.
Versión 5 ★ <i>Más exigente</i>	f es continua en $[0, 4]$, $f(0) = 1$, $f(2) = -2$ y $f(4) = 3$. ¿Cuántas raíces garantiza el TVI en $(0, 4)$? ¿Garantiza que no haya más? ¿Qué cambia si no se sabe que f es continua?

TRABAJA ESTE ARQUETIPO EN LÍNEA

Video de resolución y plantilla imprimible de 1-T2. Escanea el código o entra a metodoresuelve rapido.com/m1 y busca el código 1-T2.



CLAVE DE RESPUESTAS

1-T2 Justificar si se cumplen las hipótesis del Teorema del Valor Intermedio

1. No: f no es continua en $[-1, 1]$ (falla en $x = 0$), así que el teorema no se aplica.
2. No existe: $\llbracket x \rrbracket$ solo toma valores enteros. El TVI no se aplica porque $\llbracket x \rrbracket$ no es continua en $[0, 2]$ (salta en $x = 1$).
3. Sí para 3, que está entre 2 y 5; para 6 no hay garantía (puede existir o no).
4. Sí: $f(x) = x^2$ en $[-1, 1]$ cumple $f(-1)f(1) = 1 > 0$ y tiene la raíz $x = 0$; el TVI simplemente no la asegura.
5. Al menos dos: una en $(0, 2)$ y otra en $(2, 4)$, porque f cambia de signo en cada subintervalo. No garantiza que no haya más. Sin continuidad, el TVI no garantiza ninguna.