

Demostrar que un límite no existe

CÓDIGO

MAT-CAL 1-T1

NIVEL

■ Teórico

TIEMPO ESTIMADO

10-15 min por versión por versión

TEMA

Límites y continuidad (arquetipo del módulo)

QUÉ EVALÚA ESTE ARQUETIPO

Que el estudiante demuestre con rigor que el límite de una función concreta no existe (laterales distintos, oscilación o crecimiento sin cota).

 Pista
  Frontera
  Cuidado
  Clave
  Control
  Conexión

1 RECONOCE *Identificación del problema · ¿Qué tipo de problema es este?*

Este tipo de problema suele aparecer cuando te dan una función concreta y te piden demostrar o justificar que su límite en un punto no existe. Se espera que elijas el argumento adecuado —laterales distintos, dos sucesiones que llevan a valores distintos o crecimiento sin cota— y lo redactes, incluso si una tabla sugiere otra cosa. Ejemplo mínimo: demostrar que $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x-1|}{x-1}$ no existe.

PISTAS

- Aparecen «demuestra que no existe» o «justifica que el límite no existe», con una fórmula dada.
- La función tiene saltos, oscila (como $\sin(\frac{1}{x})$) o se comporta distinto a cada lado.

FRONTERAS

- Si solo se pide calcular los laterales en un punto de cambio: ve a «Límite en un punto donde cambia la fórmula» (1.2-G1).
- Si se pide demostrar que un límite sí existe y vale L : ve a «Demostrar un límite con la definición formal (ϵ - δ , ϵ - N o M - δ)» (1.5-T1).
- Si la afirmación es general (sobre funciones f y g cualesquiera, sin fórmula): ve a «Demostrar o refutar una afirmación general sobre límites o continuidad» (1-T3).

 CONEXIÓN Prerrequisitos: 1.2-G1 (laterales) y 1.1-G2 (la tabla engañosa de $\sin(\frac{\pi}{x})$).

2 ORGANIZA *Datos iniciales · ¿Qué tengo y qué me piden?*

Escribe la **hipótesis**: la función $f(x) = \underline{\hspace{1cm}}$ y el punto a . La **tesis** es siempre la misma: $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ no existe. Elige la estrategia: laterales distintos, dos sucesiones con límites distintos, o crecimiento sin cota.

☐ CONTROL ¿Elegiste una estrategia y la aplicaste completa?

 CUIDADO Una tabla o una gráfica no demuestran: solo sugieren.

3 ACTIVA Fórmulas o conceptos clave · ¿Qué herramientas necesito?

Concepto y fórmula	Aplicación aquí
Laterales distintos $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x)$ no existe	Estrategia para saltos.
Criterio de sucesiones Si $x_n \rightarrow a$ y $y_n \rightarrow a$ (con $x_n \neq a$, $y_n \neq a$), pero $f(x_n) \rightarrow L_1$ y $f(y_n) \rightarrow L_2$ con $L_1 \neq L_2$, el límite no existe	Estrategia para oscilaciones.
No acotada Si f no está acotada cerca de a (por ejemplo, $f(x) \rightarrow \pm\infty$), el límite no existe como número	Estrategia para asíntotas.

↪ **CONEXIÓN** Ficha teórica, temas 1.2 y 1.5.

4 RESUELVE Resolución paso a paso · ¿Qué hago y en qué orden?

A · ANÁLISIS (BORRADOR)

1. **Explora** el comportamiento cerca de a (gráfica o tabla) para elegir la estrategia.

B · CONSTRUCCIÓN DE LA PRUEBA

2. **Construye** dos caminos hacia a (laterales o sucesiones) que lleven a valores distintos, o muestra que f no está acotada.

↪ **CLAVE** Basta un par de caminos hacia a que den valores distintos para probar que el límite no existe.

3. **Calcula** el límite de f por cada camino.

C · REVISIÓN

4. **Verifica** que ambos caminos tienden a a .

□ **CONTROL** ¿Los dos caminos se acercan a a y dan valores distintos? Sí: la prueba está completa.

5. **Concluye**: «por lo tanto, $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ no existe».

5 COMPRUEBA Verificación final · ¿Tiene sentido lo que obtuve?

- ¿Los caminos elegidos tienden realmente a a ?
- ¿Los valores obtenidos son distintos?
- ¿La argumentación no depende solo de una tabla?
- ¿Cada paso está justificado?
- ¿Terminaste con la conclusión formal?

Para probar que un límite no existe no necesitas analizar todo: un solo contraejemplo (dos caminos distintos) basta.

Versión 1 Demuestra que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x}$ no existe.

Directa

Versión 2 Demuestra que $\lim_{x \rightarrow 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ no existe.

Oscilación

Versión 3 Demuestra que $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x-2}$ no existe.

Infinitos opuestos

Versión 4 Demuestra que $\lim_{x \rightarrow 0} \llbracket x \rrbracket$ no existe.

Parte entera

Versión 5 ★ Sea $f(x) = 1$ si x es racional y $f(x) = 0$ si x es irracional (función de Dirichlet). Demuestra que $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ no existe para ningún a .

Más exigente

TRABAJA ESTE ARQUETIPO EN LÍNEA

Video de resolución y plantilla imprimible de **1-T1**. Escanea el código o entra a **metodoresolverapi-do.com/m1** y busca el código **1-T1**.



CLAVE DE RESPUESTAS

1-T1 Demostrar que un límite no existe

- $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{x} = -1$ y $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{x} = 1$: los laterales son distintos.
- $x_n = \frac{1}{n\pi}$ e $y_n = \frac{2}{(4n+1)\pi}$ tienden a 0, pero $\sin\left(\frac{1}{x_n}\right) = 0$ y $\sin\left(\frac{1}{y_n}\right) = 1$ para todo n .
- $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{x-2} = -\infty$ y $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{x-2} = +\infty$.
- $\lim_{x \rightarrow 0^-} \llbracket x \rrbracket = -1$ y $\lim_{x \rightarrow 0^+} \llbracket x \rrbracket = 0$.
- Toda vecindad de a contiene racionales ($f = 1$) e irracionales ($f = 0$): hay sucesiones $x_n \rightarrow a$ e $y_n \rightarrow a$ con $f(x_n) \rightarrow 1$ y $f(y_n) \rightarrow 0$.