

Continuidad en un modelo por tramos

CÓDIGO

MAT-CAL 1-A2

NIVEL

▲ Aplicado

TIEMPO ESTIMADO

10–15 min por versión por versión

TEMA

Límites y continuidad (arquetipo del módulo)

QUÉ EVALÚA ESTE ARQUETIPO

Que el estudiante analice la continuidad de un modelo real por tramos e interprete qué significa un salto.

 Pista
  Frontera
  Cuidado
  Clave
  Control
  Conexión

1 RECONOCE *Identificación del problema · ¿Qué tipo de problema es este?*

Este tipo de problema suele aparecer cuando una situación real se describe por tramos —tarifas, impuestos, precios por volumen, leyes físicas que cambian en una frontera— y te preguntan si el modelo es continuo o qué significa un salto. Se espera que revises la continuidad en los puntos de cambio y expliques sus consecuencias. Ejemplo mínimo: un impuesto del 10 % hasta 10 000 dólares y del 15 % por encima.

PISTAS

- El modelo cambia de fórmula en ciertos valores (1 hora, 10 000 dólares, el radio de la Tierra...).
- Se pregunta «¿es continua?», «¿qué ocurre en...?» o «¿es razonable el modelo?».

FRONTERAS

- Si hay que encontrar constantes para que el modelo sea continuo: ve a «Hallar constantes o redefinir $f(a)$ para que una función sea continua» (1-I1).
- Si el modelo no es por tramos y se pregunta por el largo plazo: ve a «Interpretar un límite en un contexto» (1-A1).

 CONEXIÓN Usa «Verificar la continuidad en un punto» (1.8-G1) en cada punto de cambio.

2 ORGANIZA *Datos iniciales · ¿Qué tengo y qué me piden?*

Escribe el modelo f , los puntos de cambio ($x = \underline{\quad}$) y, en cada uno, el valor a la izquierda y a la derecha. Define qué se pide: si es continuo, la interpretación del salto, o si el modelo es razonable.

 CONTROL ¿Identificaste todos los puntos donde cambia la fórmula?

3 ACTIVA Fórmulas o conceptos clave · ¿Qué herramientas necesito?

Concepto y fórmula	Aplicación aquí
Continuidad en un punto $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$	Se revisa en cada punto de cambio.
Salto $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) - \lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$	Mide el cambio brusco del modelo en a .

↗ **CONEXIÓN** Ficha teórica, tema 1.8: Continuidad.

4 RESUELVE Resolución paso a paso · ¿Qué hago y en qué orden?

A · TRADUCE

1. **Identifica** los puntos de cambio y qué representan en la situación.

B · RESUELVE EL MODELO

2. **Calcula** los límites laterales y $f(a)$ en cada punto de cambio.
3. **Calcula** el tamaño del salto, si lo hay.

⚠ **CUIDADO** Revisa qué fórmula incluye el punto de cambio ($\leq$ o $<$).

C · INTERPRETA

4. **Interpreta** cada discontinuidad en el contexto.

🔑 **CLAVE** Un salto en un modelo es un cambio brusco en la realidad: decide si tiene sentido (una tarifa puede saltar; una distancia recorrida, no).

5. **Concluye** si el modelo es continuo y si es razonable.

❑ **CONTROL** ¿La conclusión menciona el significado del salto con unidades? Si no, complétala.

5 COMPRUEBA Verificación final · ¿Tiene sentido lo que obtuve?

- ¿Revisaste todos los puntos de cambio?
- ¿Usaste la fórmula correcta en cada punto?
- ¿Calculaste el salto con unidades?
- ¿Explicaste si el salto es razonable en la realidad?
- ¿Respondiste con una frase completa?

Pregúntate siempre: ¿puede la realidad dar un salto aquí? Un precio sí; una posición o una temperatura, casi nunca.

Versión 1 <i>Tarifa</i>	Un estacionamiento cobra 3 dólares por la primera hora (o fracción) y 2 dólares por cada hora adicional (o fracción). ¿Dónde es discontinua la tarifa? ¿Qué significa?
Versión 2 <i>Impuesto</i>	El impuesto sobre un ingreso de x dólares es $T(x) = \begin{cases} 0,10x, & x \leq 10\,000 \\ 0,15x, & x > 10\,000 \end{cases}$. ¿Es continuo en $x = 10\,000$? ¿Qué consecuencia tiene?
Versión 3 <i>Física</i>	La fuerza gravitatoria de la Tierra (masa M , radio R) sobre una masa m situada a una distancia r del centro es $F(r) = \begin{cases} \frac{GMm}{R^3}, & r < R \\ \frac{GMm}{r^2}, & r \geq R \end{cases}$. ¿Es continua en $r = R$?
Versión 4 <i>Precio por volumen</i>	Un producto cuesta 10 dólares la unidad si se compran menos de 100 unidades y 9 dólares la unidad si se compran 100 o más. ¿Es continuo el costo total $C(q)$ en $q = 100$? ¿Qué significa?
Versión 5 ★ <i>Más exigente</i>	Un tanque se llena según $V(t) = \begin{cases} 50t, & 0 \leq t \leq 2 \\ 100 + 20(t - 2), & t > 2 \end{cases}$, con V en litros y t en horas. ¿Es continuo en $t = 2$? ¿Por qué debe serlo físicamente?

TRABAJA ESTE ARQUETIPO EN LÍNEA

Video de resolución y plantilla imprimible de **1-A2**. Escanea el código o entra a **metodoresolverapi-do.com/m1** y busca el código **1-A2**.



CLAVE DE RESPUESTAS

1-A2 Continuidad en un modelo por tramos

- Salta en cada número entero de horas ($t = 1, 2, 3, \dots$): el cobro cambia de golpe al empezar una nueva hora.
- No: $\lim_{x \rightarrow 10\,000^-} T(x) = 1000$ y $\lim_{x \rightarrow 10\,000^+} T(x) = 1500$. Ganar un dólar más de 10 000 aumenta el impuesto en unos 500 dólares.
- Sí: ambas fórmulas dan $\frac{GMm}{R^2}$ en $r = R$.
- No: $\lim_{q \rightarrow 100^-} C(q) = 1000$, pero $C(100) = 900$ dólares. Comprar 100 unidades cuesta menos que comprar 99 (990 dólares).
- Sí: ambos tramos dan $V(2) = 100$ L; el volumen de agua no puede cambiar de golpe.