

# 1.1

## Idea intuitiva de límite: estimación gráfica y numérica

### IDEA CENTRAL

*El límite describe hacia qué valor se acerca  $f(x)$  cuando  $x$  se acerca a un número  $a$ , sin llegar a ser igual a  $a$ . Lo que ocurre exactamente en  $x = a$  (si  $f(a)$  existe o vale otra cosa) no afecta al límite.*

### DEFINICIONES

#### Límite (idea intuitiva)

Sea  $f$  una función definida en un intervalo abierto que contiene a  $a$ , excepto quizá en el propio  $a$ . La expresión  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$  significa que los valores de  $f(x)$  se pueden hacer tan cercanos a  $L$  como se quiera tomando  $x$  suficientemente cerca de  $a$ , con  $x \neq a$ . Si ningún número  $L$  cumple esto, se dice que el límite no existe. Se lee: «el límite de  $f(x)$  cuando  $x$  tiende a  $a$  es  $L$ ». También se escribe  $f(x) \rightarrow L$  cuando  $x \rightarrow a$ .

### TEOREMAS Y PROPIEDADES

**El límite no depende de  $f(a)$**

**Si:**  $f(x) = g(x)$  para todo  $x \neq a$  de un intervalo abierto que contiene a  $a$ , y  $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$  existe.

**Entonces:**  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x)$ , aunque  $f(a) \neq g(a)$  o  $f(a)$  no esté definido.

**Unicidad del límite**

**Si:**  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$  y también  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = M$ .

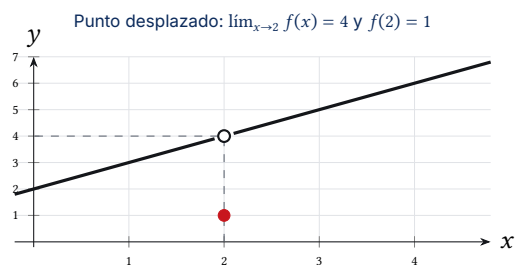
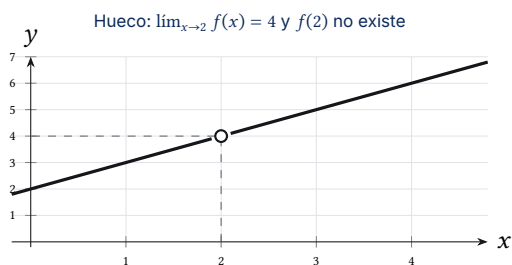
**Entonces:**  $L = M$ ; si el límite existe, es único.

 Por eso, si al acercarte a  $a$  por dos caminos distintos (por ejemplo, por la izquierda y por la derecha)  $f(x)$  se acerca a valores distintos, el límite no existe (1-T1).

### FÓRMULAS Y TÉCNICAS

| Fórmula o técnica                                        | Cuándo se usa                 | Arquetipo |
|----------------------------------------------------------|-------------------------------|-----------|
| Recorrer la gráfica hacia $a$ por ambos lados            | La función se da como gráfica | 1.1-G1    |
| Tabla con $x = a \pm 0,1$ ; $a \pm 0,01$ ; $a \pm 0,001$ | Estimar numéricamente         | 1.1-G2    |

### REPRESENTACIÓN



El límite es el mismo en ambas gráficas; solo cambia lo que ocurre exactamente en  $x = 2$ .

### ⚠ ERRORES COMUNES

- Confundir el límite con el valor  $f(a)$ : son cosas distintas.
- Mirar solo un lado de  $a$ .
- Tomar una tabla como demostración:  $\sin\left(\frac{\pi}{x}\right)$  vale 0 en  $x = 0,1; 0,01; 0,001$ , pero su límite cuando  $x \rightarrow 0$  no existe.
- Usar la calculadora en grados con funciones trigonométricas: en Cálculo los ángulos se miden en radianes.

### Practica con

- 1.1-G1** Límite a partir de una gráfica
- 1.1-G2** Límite a partir de una tabla de valores

# 1.2

## Límites laterales

### IDEA CENTRAL

A veces la función se comporta distinto a cada lado de  $a$ . Los límites laterales miran cada lado por separado, y el límite existe solo si los dos lados se ponen de acuerdo.

### DEFINICIONES

#### Límites laterales

**Por la izquierda.** Sea  $f$  definida en un intervalo  $(c, a)$ , con  $c < a$ . La expresión  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L$  significa que  $f(x)$  se puede hacer tan cercano a  $L$  como se quiera tomando  $x$  suficientemente cerca de  $a$ , con  $x < a$ .

**Por la derecha.** Sea  $f$  definida en un intervalo  $(a, c)$ , con  $c > a$ . La expresión  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$  significa lo mismo, pero con  $x > a$ .

#### Funciones con cambio de fórmula

**Por tramos:** una fórmula distinta a cada lado de un punto.

**Valor absoluto:**  $|u| = \begin{cases} u & \text{si } u \geq 0 \\ -u & \text{si } u < 0 \end{cases}$

**Parte entera:**  $\llbracket x \rrbracket = n$  si  $n \leq x < n + 1$ , con  $n$  entero; es decir,  $\llbracket x \rrbracket$  es el mayor entero menor o igual que  $x$ .

### TEOREMAS Y PROPIEDADES

#### Criterio de existencia del límite

**Si:**  $f$  está definida en un intervalo abierto que contiene a  $a$ , excepto quizá en  $a$ , y  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$ .

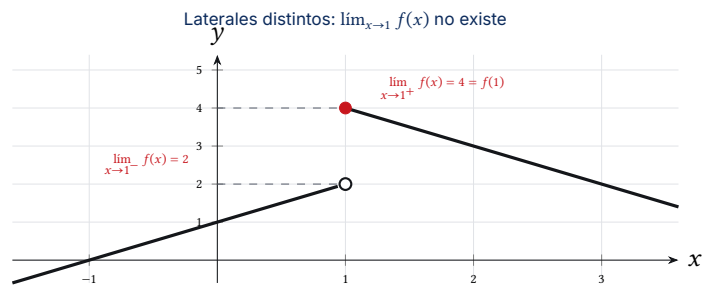
**Entonces:**  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ . Y al revés: si  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ , los dos límites laterales existen y valen  $L$ .

⚠ Si los laterales son distintos, o alguno no existe, el límite (bilateral) no existe.

### FÓRMULAS Y TÉCNICAS

| Fórmula o técnica                                               | Cuándo se usa                 | Arquetipo |
|-----------------------------------------------------------------|-------------------------------|-----------|
| Reescribir $ \cdot $ y $\llbracket \cdot \rrbracket$ por tramos | Antes de calcular laterales   | 1.2-G1    |
| Calcular cada lateral con la fórmula de su lado                 | Punto donde cambia la fórmula | 1.2-G1    |
| Comparar laterales para probar que el límite no existe          | Demostraciones                | 1-T1      |

### REPRESENTACIÓN



Por la izquierda  $f(x)$  se acerca a 2; por la derecha, a 4. El límite en  $x = 1$  no existe.

#### ⚠ ERRORES COMUNES

- Usar la fórmula del lado equivocado.
- Olvidar el signo menos: para  $x < a$ ,  $|x - a| = -(x - a)$ .
- Usar el valor  $f(a)$  para calcular un límite lateral: los laterales, igual que el límite, no dependen de  $f(a)$ .

#### Practica con

- 1.2-G1** Límite en un punto donde cambia la fórmula
- 1-T1** Demostrar que un límite no existe (del módulo)

# 1.3

## Cálculo algebraico de límites: leyes y formas indeterminadas $0/0$

### IDEA CENTRAL

Si la función es continua en  $a$ , el límite es simplemente  $f(a)$ . Cuando al sustituir aparece una forma indeterminada como  $0/0$ , todavía no hay respuesta: hay que transformar la expresión, sin cambiar sus valores para  $x \neq a$ , hasta poder sustituir.

### DEFINICIONES

#### Forma indeterminada

Expresión como  $0/0$  que aparece al sustituir y cuyo valor **no** puede decidirse sin más análisis: el límite puede ser cualquier número,  $\infty$ ,  $-\infty$  o no existir. En este módulo también aparecen  $\frac{\infty}{\infty}$  y  $\infty - \infty$ .

Ejemplo:  $\frac{x^2 - 9}{x - 3}$  da  $0/0$  en  $x = 3$ , pero  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = 6$ .

#### Funciones que coinciden salvo en un punto

$f$  y  $g$  coinciden salvo en  $a$  si  $f(x) = g(x)$  para todo  $x \neq a$  de un intervalo abierto que contiene a  $a$ . Por ejemplo,  $\frac{x^2 - 9}{x - 3}$  y  $x + 3$  coinciden salvo en  $x = 3$ . Como el límite no depende del valor en  $x = a$ , sus límites en  $a$  son iguales.

### TEOREMAS Y PROPIEDADES

#### Leyes de los límites

**Si:**  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$  y  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = M$  existen (son números reales),  $c$  es una constante y  $n$  es un entero positivo.

**Entonces:**  $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \pm g(x)] = L \pm M$ ;  $\lim_{x \rightarrow a} c f(x) = c L$ ;  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = L M$ ;  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}$  si  $M \neq 0$ ;  $\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^n = L^n$ ;

$\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{L}$  (si  $n$  es par, se exige  $L > 0$ ).

⚠ La ley del cociente exige  $M \neq 0$ . Si  $M = 0$ , esta ley no decide: hay que ver si la forma es  $0/0$  (tema 1.3) o  $L/0$  con  $L \neq 0$  (tema 1.6).

#### Sustitución directa

**Si:**  $f$  es polinómica, racional, una raíz, exponencial, logarítmica o trigonométrica (o se obtiene de ellas con operaciones y composiciones), y  $a$  es un punto interior de su dominio:  $f$  está definida en todo un intervalo abierto que contiene a  $a$ .

**Entonces:**  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ .

⚠ Si  $a$  es un extremo del dominio (por ejemplo,  $\sqrt{x}$  en  $a = 0$ ), solo tiene sentido el límite lateral:  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} = 0$ .

#### Límite de funciones que coinciden

**Si:**  $f(x) = g(x)$  para todo  $x \neq a$  de un intervalo abierto que contiene a  $a$ , y  $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$  existe.

**Entonces:**  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x)$ .

⚠ Es lo que justifica «cancelar» el factor  $(x - a)$ : la simplificación solo es válida para  $x \neq a$ , y eso basta.

#### Teorema del emparedado

**Si:**  $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$  para todo  $x \neq a$  de un intervalo abierto que contiene a  $a$ , y  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = L$ .

**Entonces:**  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ .

⚠ Las dos cotas deben tener el mismo límite; si no, el teorema no dice nada.

### FÓRMULAS Y TÉCNICAS

| Fórmula o técnica                                        | Cuándo se usa                                                                                  | Arquetipo     |
|----------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------|
| Sustituir $x = a$                                        | Siempre, como primer paso                                                                      | <b>1.3-G1</b> |
| Leyes de los límites con valores dados                   | No hay fórmulas: solo se conocen $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ | <b>1.3-G2</b> |
| Factorizar y cancelar $(x - a)$                          | 0/0 con polinomios                                                                             | <b>1.3-G3</b> |
| Conjugado: $(\sqrt{u} - b)(\sqrt{u} + b) = u - b^2$      | 0/0 con raíces                                                                                 | <b>1.3-G4</b> |
| Común denominador                                        | 0/0 con fracciones dentro de fracciones, o $\infty - \infty$ entre fracciones                  | <b>1.3-G5</b> |
| Cotas: $-1 \leq \sin u \leq 1$ y $-1 \leq \cos u \leq 1$ | Función acotada multiplicada por otra que tiende a 0                                           | <b>1.3-G6</b> |

#### ⚠ ERRORES COMUNES

- Decir que 0/0 «vale 0» o «vale 1»: es una forma indeterminada, no un número.
- Cancelar términos que **suman**: solo se cancelan factores que multiplican. Por ejemplo,  $\frac{x+3}{x}$  no es igual a 3.
- Aplicar la ley del cociente cuando el límite del denominador es 0.
- Usar una técnica sin sustituir antes: la forma que aparece decide la técnica.

#### Practica con

- 1.3-G1** Límite por sustitución directa
- 1.3-G2** Límite de una combinación de funciones cuyos límites se conocen
- 1.3-G3** Forma 0/0 con polinomios: factorizar
- 1.3-G4** Forma 0/0 con radicales: racionalizar
- 1.3-G5** Forma 0/0 con fracciones: común denominador
- 1.3-G6** Teorema del emparedado

# 1.4

## Límites trigonométricos

### IDEA CENTRAL

Los límites trigonométricos de la forma  $0/0$  no se resuelven factorizando: se reducen a un límite fundamental,  $\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} u}{u} = 1$ , que se demuestra con el teorema del emparedado.

### DEFINICIONES

#### Argumento que tiende a cero

En  $\operatorname{sen} u$ ,  $\cos u$  o  $\operatorname{tg} u$ ,  $u$  es el argumento; puede ser una expresión en  $x$ , como  $u = 5x$  o  $u = x - 2$ . Los límites fundamentales se aplican cuando  $u \rightarrow 0$ .

#### Medida en radianes

Los límites fundamentales solo valen si el ángulo se mide en radianes.

### TEOREMAS Y PROPIEDADES

#### Límite fundamental del seno

Si: el ángulo  $u$  se mide en radianes.

Entonces:  $\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} u}{u} = 1$  y, como consecuencia,  $\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} u}{u} = 1$ .

⚠ En grados, el primer límite vale  $\frac{\pi}{180}$ .

#### Límite fundamental con argumento compuesto

Si:  $\lim_{x \rightarrow a} u(x) = 0$  y  $u(x) \neq 0$  para  $x \neq a$  cerca de  $a$  (ángulos en radianes).

Entonces:  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\operatorname{sen} u(x)}{u(x)} = 1$ .

⚠ El argumento del seno y el denominador deben ser la misma expresión:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} 5x}{5x} = 1$ , pero  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} 5x}{x} = 5$ .

#### Límite del coseno

Si: el ángulo  $u$  se mide en radianes.

Entonces:  $\lim_{u \rightarrow 0} \frac{1 - \cos u}{u} = 0$  y  $\lim_{u \rightarrow 0} \frac{1 - \cos u}{u^2} = \frac{1}{2}$ .

#### Continuidad del seno y del coseno

Si:  $a$  es cualquier número real.

Entonces:  $\lim_{x \rightarrow a} \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} a$  y  $\lim_{x \rightarrow a} \cos x = \cos a$ .

## FÓRMULAS Y TÉCNICAS

| Fórmula o técnica                                                       | Cuándo se usa                                                                        | Arquetipo |
|-------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| Multiplicar y dividir para obtener $\frac{\operatorname{sen} u}{u}$     | Aparece $\operatorname{sen} kx$ con $k \neq 1$                                       | 1.4-G1    |
| $1 - \cos^2 u = \operatorname{sen}^2 u$ (multiplicar por $1 + \cos u$ ) | Expresiones con $1 - \cos u$                                                         | 1.4-G1    |
| $\operatorname{tg} u = \frac{\operatorname{sen} u}{\cos u}$             | Expresiones con tangente                                                             | 1.4-G1    |
| Cambio de variable $u = x - a$                                          | $x \rightarrow a$ con $a \neq 0$ : el argumento tiende a 0 solo después de trasladar | 1.4-G1    |

### ⚠ ERRORES COMUNES

- Simplificar  $\frac{\operatorname{sen} 5x}{x}$  como  $\operatorname{sen} 5$ : el seno no es un factor que se pueda cancelar.
- Trabajar en grados.
- Aplicar  $\frac{\operatorname{sen} u}{u} \rightarrow 1$  cuando  $u$  no tiende a 0: por ejemplo,  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 0$ , no 1.

### Practica con

**1.4-G1** Límite que se reduce a  $\frac{\operatorname{sen} u}{u}$  o a  $\frac{1 - \cos u}{u}$

# 1.5

## Definición formal de límite ( $\varepsilon$ - $\delta$ )

### IDEA CENTRAL

La definición  $\varepsilon$ - $\delta$  convierte «tan cerca como se quiera» en una promesa precisa: para cualquier tolerancia  $\varepsilon > 0$  alrededor de  $L$ , existe una distancia  $\delta > 0$  alrededor de  $a$  que la garantiza.

### DEFINICIONES

#### Definición $\varepsilon$ - $\delta$

Sea  $f$  definida en un intervalo abierto que contiene a  $a$ , excepto quizá en  $a$ . Se dice que  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$  si para todo  $\varepsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que

$$0 < |x - a| < \delta \implies |f(x) - L| < \varepsilon.$$

$\varepsilon$  mide la cercanía en el eje  $y$ ;  $\delta$ , la cercanía en el eje  $x$ . La condición  $0 < |x - a|$  excluye  $x = a$ : por eso el límite no depende de  $f(a)$ .

#### Otras definiciones formales

**Lateral** ( $f$  definida en  $(a, c)$ ):  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$  si para todo  $\varepsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que  $a < x < a + \delta \implies |f(x) - L| < \varepsilon$ . Por la izquierda ( $f$  definida en  $(c, a)$ ), igual con  $a - \delta < x < a$ .

**Límite infinito** ( $M$ - $\delta$ ;  $f$  definida como en la definición  $\varepsilon$ - $\delta$ ):  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$  si para todo  $M > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que  $0 < |x - a| < \delta \implies f(x) > M$ . Para  $-\infty$  se pide  $f(x) < -M$ .

**Límite al infinito** ( $\varepsilon$ - $N$ ;  $f$  definida en un intervalo  $(c, \infty)$ ):  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$  si para todo  $\varepsilon > 0$  existe un número  $N$  tal que  $x > N \implies |f(x) - L| < \varepsilon$ . Para  $x \rightarrow -\infty$ , igual con  $x < N$ .

### TEOREMAS Y PROPIEDADES

#### Caso lineal

**Si:**  $f(x) = mx + b$  con  $m \neq 0$ ,  $a$  es un número real y  $L = ma + b$ .

**Entonces:** para cada  $\varepsilon > 0$ , el valor  $\delta = \frac{\varepsilon}{|m|}$  cumple la definición de  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ .

△ Se comprueba así: si  $0 < |x - a| < \delta$ , entonces  $|f(x) - L| = |m||x - a| < |m|\delta = \varepsilon$ .

#### Un $\delta$ más pequeño también sirve

**Si:**  $\delta > 0$  cumple la definición para un  $\varepsilon$  dado.

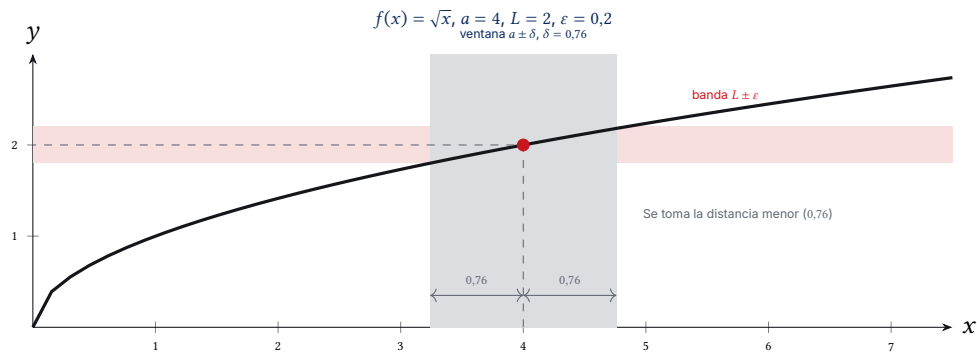
**Entonces:** cualquier  $\delta'$  con  $0 < \delta' < \delta$  también la cumple para ese  $\varepsilon$ .

△ Por eso, si la condición  $|f(x) - L| < \varepsilon$  da un intervalo asimétrico alrededor de  $a$ , se toma como  $\delta$  la distancia menor.

FÓRMULAS Y TÉCNICAS

| Fórmula o técnica                                                                                                                    | Cuándo se usa               | Arquetipo |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------|-----------|
| Despejar $ x - a $ a partir de $ f(x) - L  < \varepsilon$                                                                            | $\varepsilon$ numérico dado | 1.5-G1    |
| Suponer $ x - a  < 1$ , acotar el factor restante por una constante $K$ y tomar $\delta = \min\left(1, \frac{\varepsilon}{K}\right)$ | Funciones no lineales       | 1.5-T1    |
| Separar borrador (buscar $\delta$ ) y prueba (verificar $\delta$ )                                                                   | Demostraciones              | 1.5-T1    |

REPRESENTACIÓN



Si  $x \neq a$  está en la ventana  $(a - \delta, a + \delta)$ , simétrica alrededor de  $a$ , entonces  $f(x)$  queda dentro de la banda  $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$ .

⚠ ERRORES COMUNES

- Hacer que  $\delta$  dependa de  $x$ : solo puede depender de  $\varepsilon$  (y de  $a$ ).
- Intercambiar los papeles de  $\varepsilon$  y  $\delta$ :  $\varepsilon$  es dado (cualquiera) y  $\delta$  es el que tú encuentras.
- En un intervalo asimétrico, tomar la distancia mayor en lugar de la menor.

Practica con

- 1.5-G1 Encontrar  $\delta$  para un  $\varepsilon$  dado
- 1.5-T1 Demostrar un límite con la definición formal ( $\varepsilon$ - $\delta$ ,  $\varepsilon$ - $N$  o  $M$ - $\delta$ )
- 1-T3 Demostrar o refutar una afirmación general sobre límites o continuidad (del módulo)

# 1.6

## Límites infinitos y asíntotas verticales

### IDEA CENTRAL

A veces, al acercarse  $x$  a un número  $a$ , la función no se acerca a ningún valor: crece (o decrece) sin cota. Ese comportamiento se escribe con  $\infty$  o  $-\infty$  y se ve en la gráfica como una recta vertical a la que la curva se acerca cada vez más.

### DEFINICIONES

#### Límite infinito

Sea  $f$  definida en un intervalo abierto que contiene a  $a$ , excepto quizá en  $a$ . La expresión  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$  significa que  $f(x)$  se hace tan grande como se quiera tomando  $x$  suficientemente cerca de  $a$ , con  $x \neq a$ . Formalmente: para todo  $M > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que  $0 < |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) > M$ . Para  $-\infty$  se pide  $f(x) < -M$ ; para los laterales se cambia  $0 < |x - a| < \delta$  por  $a < x < a + \delta$  (derecha) o por  $a - \delta < x < a$  (izquierda).

#### Asíntota vertical

La recta  $x = a$  es una asíntota vertical de la gráfica de  $f$  si **al menos uno** de los límites laterales de  $f$  en  $a$  es  $\infty$  o  $-\infty$ .

### TEOREMAS Y PROPIEDADES

#### Forma $L/0$

**Si:** por un lado de  $a$  (izquierda o derecha):  $N(x) \rightarrow L$  con  $L \neq 0$ ,  $D(x) \rightarrow 0$ , y  $D(x)$  no se anula y tiene signo constante en ese lado, cerca de  $a$ .

**Entonces:** por ese lado,  $\frac{N(x)}{D(x)} \rightarrow \infty$  si  $L$  y  $D(x)$  tienen el mismo signo, y  $\frac{N(x)}{D(x)} \rightarrow -\infty$  si tienen signos distintos.

⚠ Si también  $N(x) \rightarrow 0$ , la forma es  $0/0$ : no es este caso.

#### Límite infinito bilateral

**Si:**  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \infty$  (o ambos son  $-\infty$ ).

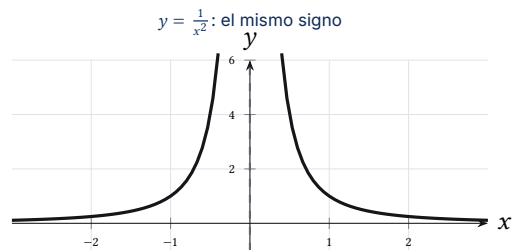
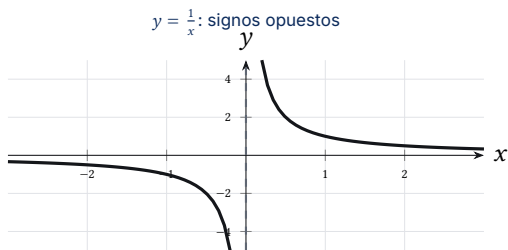
**Entonces:** se escribe  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$  (o  $-\infty$ ).

⚠ Es una notación: el límite no existe como número real. Si los laterales son infinitos de signo distinto, se da cada lateral por separado y no se escribe ningún valor para el límite bilateral.

### FÓRMULAS Y TÉCNICAS

| Fórmula o técnica                                                                                                                         | Cuándo se usa               | Arquetipo |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------|-----------|
| Análisis de signos de $N$ y $D$ a cada lado de $a$                                                                                        | Forma $L/0$ con $L \neq 0$  | 1.6-G1    |
| Candidatos: ceros del denominador; $\ln u$ cuando $u \rightarrow 0^+$ ; $\operatorname{tg} x$ en $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ ( $k$ entero) | Buscar asíntotas verticales | 1.6-G2    |
| Simplificar antes de decidir (hueco o asíntota)                                                                                           | Denominador que se anula    | 1.6-G2    |

## REPRESENTACIÓN



Con  $\frac{1}{x}$  (potencia impar) los dos lados tienen signos opuestos; con  $\frac{1}{x^2}$  (potencia par), el mismo signo.

### ⚠ ERRORES COMUNES

- Escribir  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$  y decir que «el límite existe»:  $\infty$  no es un número, describe un comportamiento.
- Confundir un **hueco** con una asíntota vertical: si al simplificar el factor  $(x - a)$  desaparece del denominador, en  $x = a$  hay un hueco, no una asíntota.
- Olvidar que con  $(x - a)$  elevado a una potencia impar los dos lados tienen signos opuestos (y con potencia par, el mismo).

### Practica con

- 1.6-G1 Límite cuando el denominador se anula y el numerador no
- 1.6-G2 Hallar las asíntotas verticales de una función
- 1-I2 Análisis completo de las asíntotas de una función racional (del módulo)

# 1.7

## Límites al infinito y asíntotas horizontales y oblicuas

### IDEA CENTRAL

Los límites al infinito describen el comportamiento a largo plazo: qué le pasa a  $f(x)$  cuando  $x$  crece o decrece sin cota. Si  $f(x)$  se estabiliza en un valor, la gráfica tiene una asíntota horizontal.

### DEFINICIONES

#### Límite al infinito

Sea  $f$  definida en un intervalo  $(c, \infty)$ . La expresión  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$  significa que  $f(x)$  se puede hacer tan cercano a  $L$  como se quiera tomando  $x$  suficientemente grande. Formalmente: para todo  $\varepsilon > 0$  existe  $N$  tal que  $x > N \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$ . Análogo para  $x \rightarrow -\infty$ , con  $f$  definida en  $(-\infty, c)$  y  $x < N$ .

**Límite infinito en el infinito:**  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$  si para todo  $M > 0$  existe  $N$  tal que  $x > N \Rightarrow f(x) > M$  (por ejemplo,  $x^3$  o  $e^x$ ).

#### Asíntotas no verticales

**Horizontal:** la recta  $y = L$  es asíntota horizontal de la gráfica de  $f$  si  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$  o  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$ .

**Oblicua:** la recta  $y = mx + b$ , con  $m \neq 0$ , es asíntota oblicua si  $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - (mx + b)] = 0$  o  $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (mx + b)] = 0$ .

### TEOREMAS Y PROPIEDADES

#### Potencias recíprocas

**Si:**  $r > 0$  es un número racional.

**Entonces:**  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^r} = 0$ ; si además  $x^r$  está definida para  $x < 0$ , también  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^r} = 0$ .

#### Regla de los grados (funciones racionales)

**Si:**  $f(x) = \frac{N(x)}{D(x)}$ , donde  $N$  y  $D$  son polinomios de grados  $n$  y  $m$  con coeficientes principales  $a_n$  y  $b_m$ .

**Entonces:** cuando  $x \rightarrow \infty$  o  $x \rightarrow -\infty$ : si  $n < m$ ,  $f(x) \rightarrow 0$ ; si  $n = m$ ,  $f(x) \rightarrow \frac{a_n}{b_m}$ ; si  $n > m$ ,  $f(x) \rightarrow \infty$  o  $f(x) \rightarrow -\infty$  (el signo depende de  $a_n$ , de  $b_m$  y del lado).

△ Si  $n = m + 1$ , la gráfica tiene una asíntota oblicua: la recta dada por el cociente de dividir  $N$  entre  $D$ .

#### Funciones elementales

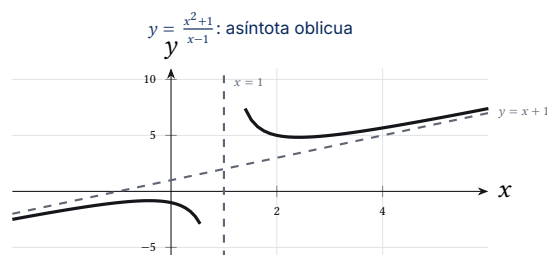
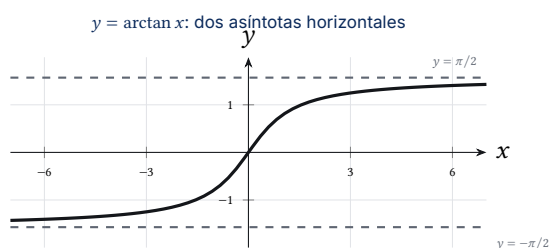
**Si:** se trabaja con  $e^x$ ,  $\ln x$  o  $\arctg x$  en su dominio.

**Entonces:**  $\lim_{x \rightarrow \infty} e^x = \infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow \infty} \ln x = \infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow \infty} \arctg x = \frac{\pi}{2}$  y  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \arctg x = -\frac{\pi}{2}$ .

## FÓRMULAS Y TÉCNICAS

| Fórmula o técnica                                                                                   | Cuándo se usa                            | Arquetipo |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------|-----------|
| Dividir numerador y denominador por la mayor potencia de $x$ del denominador                        | Cociente de polinomios                   | 1.7-G1    |
| $\sqrt{x^2} =  x $ y conjugado                                                                      | Radicales o $\infty - \infty$            | 1.7-G2    |
| Dividir por la exponencial dominante; usar los límites de $e^x$ , $\ln x$ y $\arctan x$             | Exponenciales, logaritmos o arcotangente | 1.7-G3    |
| División de polinomios: $f(x) = mx + b + \frac{R(x)}{D(x)}$ con grado de $R$ menor que grado de $D$ | Asíntota oblicua                         | 1.7-G4    |

## REPRESENTACIÓN



Una función puede tener dos asíntotas horizontales distintas (como  $\arctan x$ ) o una asíntota oblicua (como  $\frac{x^2+1}{x-1}$ , con  $y = x+1$ ).

### ⚠ ERRORES COMUNES

- Pensar que  $\infty - \infty = 0$ : es una forma indeterminada.
- Escribir  $\sqrt{x^2} = x$  cuando  $x \rightarrow -\infty$ : allí  $\sqrt{x^2} = |x| = -x$ .
- Creer que la gráfica nunca cruza una asíntota horizontal: puede cruzarla (por ejemplo,  $\frac{\sin x}{x}$  cruza  $y = 0$  infinitas veces).
- Analizar solo  $x \rightarrow \infty$  y olvidar  $x \rightarrow -\infty$ .

### Practica con

- 1.7-G1 Límite al infinito de una función racional
- 1.7-G2 Límite al infinito con radicales
- 1.7-G3 Límite al infinito con exponenciales, logaritmos o arcotangente
- 1.7-G4 Hallar asíntotas horizontales y oblicuas
- 1-I2 Análisis completo de las asíntotas de una función racional (del módulo)
- 1-A1 Interpretar un límite en un contexto (del módulo)

# 1.8

## Continuidad en un punto y tipos de discontinuidad

### IDEA CENTRAL

*Una función es continua en  $a$  cuando su gráfica no se rompe allí: el valor  $f(a)$  coincide con el valor al que la función se acerca.*

### DEFINICIONES

#### Continuidad en un punto

Sea  $f$  definida en un intervalo abierto que contiene a  $a$ , excepto quizá en  $a$ .  $f$  es continua en  $a$  si se cumplen las tres condiciones: (1)  $f(a)$  está definido; (2)  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  existe; (3)  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ . Si alguna falla,  $f$  es discontinua en  $a$ .

#### Tipos de discontinuidad

Si  $f$  es discontinua en  $a$ , estos son los tipos más frecuentes:

- **Evitable:**  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  existe (es un número), pero  $f(a)$  no está definido o es distinto del límite.
- **De salto:** los dos límites laterales existen (son números) y son distintos.
- **Infinita:** al menos uno de los límites laterales es  $\infty$  o  $-\infty$ .
- **Oscilante:** algún límite lateral no existe porque  $f$  oscila sin acercarse a ningún valor, como  $\sin\left(\frac{1}{x}\right)$  en 0.

Las de salto, infinitas y oscilantes son **no evitables**: ningún valor de  $f(a)$  las elimina.

#### Continuidad lateral

$f$  es continua por la derecha en  $a$  si  $f(a)$  está definido y  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$ ; es continua por la izquierda en  $a$  si  $f(a)$  está definido y  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$ .  $f$  es continua en  $a$  si y solo si es continua por ambos lados.

#### Continuidad en un intervalo

$f$  es continua en un intervalo si es continua en cada punto interior del intervalo y, en cada extremo que pertenece al intervalo, tiene la continuidad lateral correspondiente: por la derecha en el extremo izquierdo y por la izquierda en el extremo derecho.

#### Extensión continua

Si  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$  existe pero  $f(a)$  no está definido (o es distinto de  $L$ ), la función

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq a \\ L & \text{si } x = a \end{cases}$$

es continua en  $a$ . Si  $f(a)$  no estaba definido,  $F$  es la extensión continua de  $f$  en  $a$ ; si estaba definido, se dice que se redefine  $f(a)$ . Solo es posible en las discontinuidades evitables.

## TEOREMAS Y PROPIEDADES

### Operaciones con funciones continuas

**Si:**  $f$  y  $g$  son continuas en  $a$  y  $c$  es una constante.

**Entonces:**  $f + g$ ,  $f - g$ ,  $cf$  y  $fg$  son continuas en  $a$ ;  $\frac{f}{g}$  también lo es si  $g(a) \neq 0$ .

### Funciones elementales

**Si:**  $f$  es polinómica, racional, una raíz, exponencial, logarítmica, trigonométrica o trigonométrica inversa.

**Entonces:**  $f$  es continua en cada punto de su dominio (en un extremo del dominio, con la continuidad lateral correspondiente).

⚠ Fuera del dominio no se habla de continuidad: por ejemplo,  $\frac{1}{x}$  es continua en  $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ .

### Límite de una composición

**Si:**  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L$  y  $f$  es continua en  $L$ .

**Entonces:**  $\lim_{x \rightarrow a} f(g(x)) = f\left(\lim_{x \rightarrow a} g(x)\right) = f(L)$ .

⚠ Exige que la función de afuera,  $f$ , sea continua en  $L$ . En particular, si  $g$  es continua en  $a$  y  $f$  es continua en  $g(a)$ , entonces  $f \circ g$  es continua en  $a$ .

### Conservación del signo

**Si:**  $f$  es continua en  $a$  y  $f(a) > 0$ .

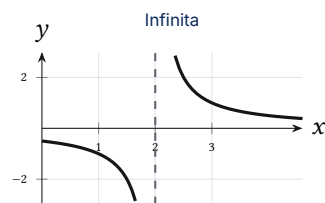
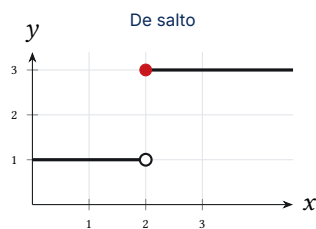
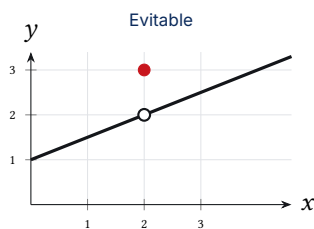
**Entonces:** existe  $\delta > 0$  tal que  $f(x) > 0$  para todo  $x$  del intervalo  $(a - \delta, a + \delta)$ .

⚠ Se demuestra con  $\epsilon = \frac{f(a)}{2}$  en la definición de límite (arquetipo 1-T3). Análogo si  $f(a) < 0$ .

## FÓRMULAS Y TÉCNICAS

| Fórmula o técnica                                                                                                   | Cuándo se usa                  | Arquetipo |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------|-----------|
| Verificar las tres condiciones en orden                                                                             | ¿Es continua en $a$ ?          | 1.8-G1    |
| Calcular los límites laterales y compararlos con $f(a)$                                                             | Tipo de discontinuidad         | 1.8-G2    |
| Dominio + revisar las uniones de tramos                                                                             | ¿Dónde es continua $f$ ?       | 1.8-G3    |
| Meter el límite dentro de la función continua:<br>$\lim_{x \rightarrow a} f(g(x)) = f(\lim_{x \rightarrow a} g(x))$ | Composición con $f$ continua   | 1.8-G4    |
| Igualar los dos laterales y $f(a)$ en cada unión                                                                    | Constantes que dan continuidad | 1-I1      |

## REPRESENTACIÓN



*Los tres tipos de discontinuidad más frecuentes: evitable, de salto e infinita.*

#### ⚠ ERRORES COMUNES

- Creer que basta con que el límite exista: también debe ser igual a  $f(a)$ .
- Clasificar la discontinuidad por el valor  $f(a)$  en lugar de por los límites laterales.
- Olvidar la continuidad lateral en los extremos de un intervalo cerrado.

#### Practica con

- |               |                                                                                     |
|---------------|-------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>1.8-G1</b> | Verificar la continuidad en un punto                                                |
| <b>1.8-G2</b> | Clasificar una discontinuidad                                                       |
| <b>1.8-G3</b> | Hallar los intervalos donde una función es continua                                 |
| <b>1.8-G4</b> | Límite de una función compuesta usando la continuidad                               |
| <b>1-I1</b>   | Hallar constantes o redefinir $f(a)$ para que una función sea continua (del módulo) |
| <b>1-A2</b>   | Continuidad en un modelo por tramos (del módulo)                                    |

# 1.9

## Continuidad en intervalos y Teorema del Valor Intermedio

### IDEA CENTRAL

Una función continua en un intervalo cerrado no puede saltarse valores: si empieza por debajo de un nivel y termina por encima, tiene que cruzarlo en algún punto.

### DEFINICIONES

#### Continuidad en un intervalo cerrado

$f$  es continua en un intervalo cerrado  $[a, b]$  si es continua en cada punto de  $(a, b)$ , continua por la derecha en  $a$  y continua por la izquierda en  $b$ . En particular,  $f(a)$  y  $f(b)$  deben estar definidos.

### TEOREMAS Y PROPIEDADES

#### Teorema del Valor Intermedio (TVI)

**Si:**  $f$  es continua en el intervalo cerrado  $[a, b]$ ,  $f(a) \neq f(b)$  y  $k$  es cualquier número estrictamente entre  $f(a)$  y  $f(b)$ .

**Entonces:** existe al menos un número  $c \in (a, b)$  tal que  $f(c) = k$ .

⚠️ Garantiza la existencia de  $c$ , no su unicidad ni su ubicación exacta.

#### Existencia de raíces (Bolzano)

**Si:**  $f$  es continua en  $[a, b]$  y  $f(a)$  y  $f(b)$  tienen signos opuestos, es decir,  $f(a) \cdot f(b) < 0$ .

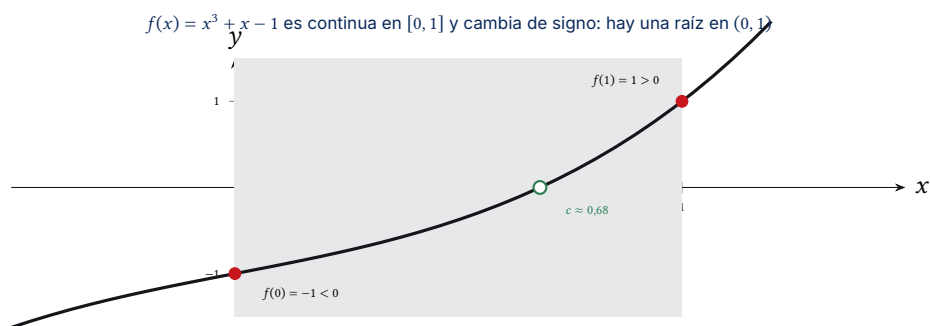
**Entonces:** existe al menos un  $c \in (a, b)$  tal que  $f(c) = 0$ : la ecuación  $f(x) = 0$  tiene al menos una solución en  $(a, b)$ .

⚠️ Es el TVI con  $k = 0$ .

### FÓRMULAS Y TÉCNICAS

| Fórmula o técnica                                                     | Cuándo se usa                             | Arquetipo |
|-----------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------|-----------|
| Pasar todo a un lado: $h(x) = 0$ , y buscar un cambio de signo de $h$ | Probar que una ecuación tiene solución    | 1.9-G1    |
| Bisección: repetir en la mitad donde hay cambio de signo              | Localizar la raíz en un intervalo pequeño | 1.9-G1    |
| Revisar las hipótesis una por una                                     | ¿Se puede aplicar el teorema?             | 1-T2      |

### REPRESENTACIÓN



$f(x) = x^3 + x - 1$  es continua en  $[0, 1]$  y cambia de signo: tiene una raíz en  $(0, 1)$ .

#### ⚠ ERRORES COMUNES

- Aplicar el teorema sin comprobar la continuidad en todo  $[a, b]$ : por ejemplo,  $\frac{1}{x}$  cambia de signo en  $[-1, 1]$  y no tiene raíces.
- Pensar que si  $f(a) \cdot f(b) > 0$  no hay raíces: el teorema simplemente no dice nada (por ejemplo,  $x^2 - \frac{1}{4}$  es positiva en  $x = -1$  y en  $x = 1$ , y tiene dos raíces en  $[-1, 1]$ ).
- Creer que el teorema da el valor de la raíz: solo asegura que existe.

#### Practica con

**1.9-G1** Probar que una ecuación tiene una raíz en un intervalo

**1-T2** Justificar si se cumplen las hipótesis del Teorema del Valor Intermedio (del módulo)

# M1

## Arquetipos del módulo

### IDEA CENTRAL

*Hasta aquí cada plantilla entrenaba una técnica. Los diez arquetipos siguientes combinan temas: son los problemas que se parecen a un examen completo.*

### LOS DIEZ ARQUETIPOS QUE COMBINAN TEMAS

| Código        | Qué entrenan                                                                                                                                                                     |
|---------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| ▲ 1-A1, 1-A2  | <b>Aplicados.</b> Traducir una situación real a un límite o a un modelo por tramos, y decir qué significa el resultado con sus unidades.                                         |
| ◆ 1-I1 a 1-I3 | <b>Integradores.</b> Combinar varias técnicas: continuidad con parámetros, análisis completo de asíntotas, y el problema inverso de dibujar una función a partir de sus límites. |
| ■ 1-T1 a 1-T3 | <b>Teóricos.</b> Demostrar que un límite no existe, justificar las hipótesis de un teorema y demostrar o refutar afirmaciones generales.                                         |
| ★ 1-X1, 1-X2  | <b>Desafíos.</b> Parámetros que hacen existir un límite y límites no rutinarios que exigen una heurística.                                                                       |

*Antes de empezar un arquetipo del módulo, repasa las plantillas de los temas que cita en su sección Conexión.*