

1.9

Continuidad en intervalos y Teorema del Valor Intermedio

IDEA CENTRAL

Una función continua en un intervalo cerrado no puede saltarse valores: si empieza por debajo de un nivel y termina por encima, tiene que cruzarlo en algún punto.

DEFINICIONES

Continuidad en un intervalo cerrado

f es continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ si es continua en cada punto de (a, b) , continua por la derecha en a y continua por la izquierda en b . En particular, $f(a)$ y $f(b)$ deben estar definidos.

TEOREMAS Y PROPIEDADES

Teorema del Valor Intermedio (TVI)

Si: f es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$, $f(a) \neq f(b)$ y k es cualquier número estrictamente entre $f(a)$ y $f(b)$.

Entonces: existe al menos un número $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = k$.

⚠️ Garantiza la existencia de c , no su unicidad ni su ubicación exacta.

Existencia de raíces (Bolzano)

Si: f es continua en $[a, b]$ y $f(a)$ y $f(b)$ tienen signos opuestos, es decir, $f(a) \cdot f(b) < 0$.

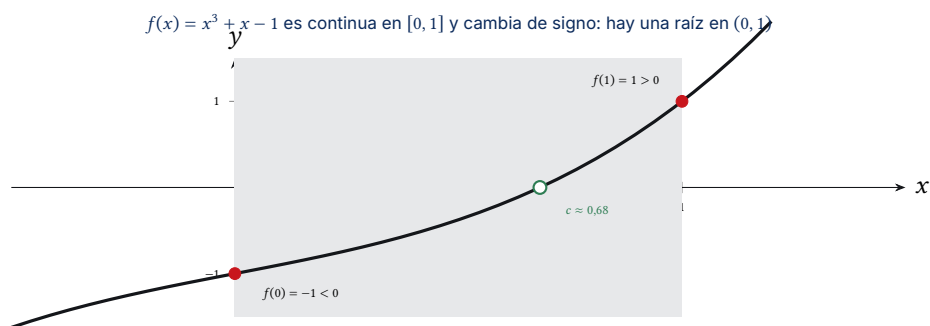
Entonces: existe al menos un $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$: la ecuación $f(x) = 0$ tiene al menos una solución en (a, b) .

⚠️ Es el TVI con $k = 0$.

FÓRMULAS Y TÉCNICAS

Fórmula o técnica	Cuándo se usa	Arquetipo
Pasar todo a un lado: $h(x) = 0$, y buscar un cambio de signo de h	Probar que una ecuación tiene solución	1.9-G1
Bisección: repetir en la mitad donde hay cambio de signo	Localizar la raíz en un intervalo pequeño	1.9-G1
Revisar las hipótesis una por una	¿Se puede aplicar el teorema?	1-T2

REPRESENTACIÓN



$f(x) = x^3 + x - 1$ es continua en $[0, 1]$ y cambia de signo: tiene una raíz en $(0, 1)$.

⚠ ERRORES COMUNES

- Aplicar el teorema sin comprobar la continuidad en todo $[a, b]$: por ejemplo, $\frac{1}{x}$ cambia de signo en $[-1, 1]$ y no tiene raíces.
- Pensar que si $f(a) \cdot f(b) > 0$ no hay raíces: el teorema simplemente no dice nada (por ejemplo, $x^2 - \frac{1}{4}$ es positiva en $x = -1$ y en $x = 1$, y tiene dos raíces en $[-1, 1]$).
- Creer que el teorema da el valor de la raíz: solo asegura que existe.

Practica con

- 1.9-G1** Probar que una ecuación tiene una raíz en un intervalo
- 1-T2** Justificar si se cumplen las hipótesis del Teorema del Valor Intermedio (del módulo)