

1.8

Continuidad en un punto y tipos de discontinuidad

IDEA CENTRAL

Una función es continua en a cuando su gráfica no se rompe allí: el valor $f(a)$ coincide con el valor al que la función se acerca.

DEFINICIONES

Continuidad en un punto

Sea f definida en un intervalo abierto que contiene a a , excepto quizá en a . f es continua en a si se cumplen las tres condiciones: (1) $f(a)$ está definido; (2) $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existe; (3) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$. Si alguna falla, f es discontinua en a .

Tipos de discontinuidad

Si f es discontinua en a , estos son los tipos más frecuentes:

- **Evitable:** $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existe (es un número), pero $f(a)$ no está definido o es distinto del límite.
- **De salto:** los dos límites laterales existen (son números) y son distintos.
- **Infinita:** al menos uno de los límites laterales es ∞ o $-\infty$.
- **Oscilante:** algún límite lateral no existe porque f oscila sin acercarse a ningún valor, como $\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ en 0.

Las de salto, infinitas y oscilantes son **no evitables**: ningún valor de $f(a)$ las elimina.

Continuidad lateral

f es continua por la derecha en a si $f(a)$ está definido y $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$; es continua por la izquierda en a si $f(a)$ está definido y $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$. f es continua en a si y solo si es continua por ambos lados.

Continuidad en un intervalo

f es continua en un intervalo si es continua en cada punto interior del intervalo y, en cada extremo que pertenece al intervalo, tiene la continuidad lateral correspondiente: por la derecha en el extremo izquierdo y por la izquierda en el extremo derecho.

Extensión continua

Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ existe pero $f(a)$ no está definido (o es distinto de L), la función

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq a \\ L & \text{si } x = a \end{cases}$$

es continua en a . Si $f(a)$ no estaba definido, F es la extensión continua de f en a ; si estaba definido, se dice que se redefine $f(a)$. Solo es posible en las discontinuidades evitables.

TEOREMAS Y PROPIEDADES

Operaciones con funciones continuas

Si: f y g son continuas en a y c es una constante.

Entonces: $f + g$, $f - g$, cf y fg son continuas en a ; $\frac{f}{g}$ también lo es si $g(a) \neq 0$.

Funciones elementales

Si: f es polinómica, racional, una raíz, exponencial, logarítmica, trigonométrica o trigonométrica inversa.

Entonces: f es continua en cada punto de su dominio (en un extremo del dominio, con la continuidad lateral correspondiente).

⚠ Fuera del dominio no se habla de continuidad: por ejemplo, $\frac{1}{x}$ es continua en $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.

Límite de una composición

Si: $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L$ y f es continua en L .

Entonces: $\lim_{x \rightarrow a} f(g(x)) = f\left(\lim_{x \rightarrow a} g(x)\right) = f(L)$.

⚠ Exige que la función de afuera, f , sea continua en L . En particular, si g es continua en a y f es continua en $g(a)$, entonces $f \circ g$ es continua en a .

Conservación del signo

Si: f es continua en a y $f(a) > 0$.

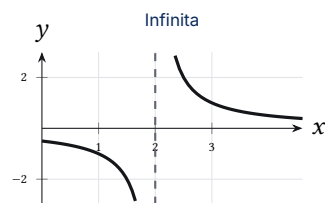
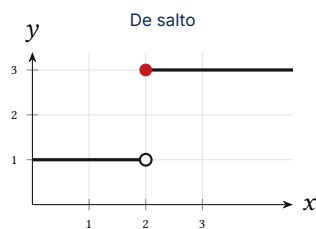
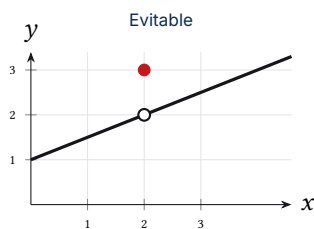
Entonces: existe $\delta > 0$ tal que $f(x) > 0$ para todo x del intervalo $(a - \delta, a + \delta)$.

⚠ Se demuestra con $\epsilon = \frac{f(a)}{2}$ en la definición de límite (arquetipo 1-T3). Análogo si $f(a) < 0$.

FÓRMULAS Y TÉCNICAS

Fórmula o técnica	Cuándo se usa	Arquetipo
Verificar las tres condiciones en orden	¿Es continua en a ?	1.8-G1
Calcular los límites laterales y compararlos con $f(a)$	Tipo de discontinuidad	1.8-G2
Dominio + revisar las uniones de tramos	¿Dónde es continua f ?	1.8-G3
Meter el límite dentro de la función continua: $\lim_{x \rightarrow a} f(g(x)) = f(\lim_{x \rightarrow a} g(x))$	Composición con f continua	1.8-G4
Igualar los dos laterales y $f(a)$ en cada unión	Constantes que dan continuidad	1-I1

REPRESENTACIÓN



Los tres tipos de discontinuidad más frecuentes: evitable, de salto e infinita.

⚠ ERRORES COMUNES

- Creer que basta con que el límite exista: también debe ser igual a $f(a)$.
- Clasificar la discontinuidad por el valor $f(a)$ en lugar de por los límites laterales.
- Olvidar la continuidad lateral en los extremos de un intervalo cerrado.

Practica con

- | | |
|---------------|---|
| 1.8-G1 | Verificar la continuidad en un punto |
| 1.8-G2 | Clasificar una discontinuidad |
| 1.8-G3 | Hallar los intervalos donde una función es continua |
| 1.8-G4 | Límite de una función compuesta usando la continuidad |
| 1-I1 | Hallar constantes o redefinir $f(a)$ para que una función sea continua (del módulo) |
| 1-A2 | Continuidad en un modelo por tramos (del módulo) |