

1.7

Límites al infinito y asíntotas horizontales y oblicuas

IDEA CENTRAL

Los límites al infinito describen el comportamiento a largo plazo: qué le pasa a $f(x)$ cuando x crece o decrece sin cota. Si $f(x)$ se estabiliza en un valor, la gráfica tiene una asíntota horizontal.

DEFINICIONES

Límite al infinito

Sea f definida en un intervalo (c, ∞) . La expresión $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$ significa que $f(x)$ se puede hacer tan cercano a L como se quiera tomando x suficientemente grande. Formalmente: para todo $\varepsilon > 0$ existe N tal que $x > N \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$. Análogo para $x \rightarrow -\infty$, con f definida en $(-\infty, c)$ y $x < N$.

Límite infinito en el infinito: $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ si para todo $M > 0$ existe N tal que $x > N \Rightarrow f(x) > M$ (por ejemplo, x^3 o e^x).

Asíntotas no verticales

Horizontal: la recta $y = L$ es asíntota horizontal de la gráfica de f si $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$ o $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$.

Oblicua: la recta $y = mx + b$, con $m \neq 0$, es asíntota oblicua si $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - (mx + b)] = 0$ o $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (mx + b)] = 0$.

TEOREMAS Y PROPIEDADES

Potencias recíprocas

Si: $r > 0$ es un número racional.

Entonces: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^r} = 0$; si además x^r está definida para $x < 0$, también $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^r} = 0$.

Regla de los grados (funciones racionales)

Si: $f(x) = \frac{N(x)}{D(x)}$, donde N y D son polinomios de grados n y m con coeficientes principales a_n y b_m .

Entonces: cuando $x \rightarrow \infty$ o $x \rightarrow -\infty$: si $n < m$, $f(x) \rightarrow 0$; si $n = m$, $f(x) \rightarrow \frac{a_n}{b_m}$; si $n > m$, $f(x) \rightarrow \infty$ o $f(x) \rightarrow -\infty$ (el signo depende de a_n , de b_m y del lado).

△ Si $n = m + 1$, la gráfica tiene una asíntota oblicua: la recta dada por el cociente de dividir N entre D .

Funciones elementales

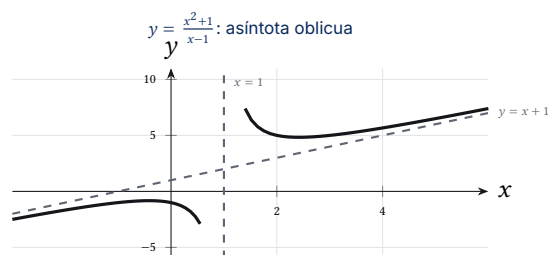
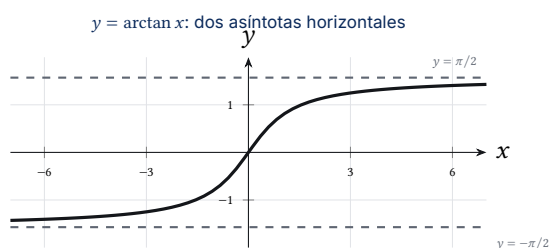
Si: se trabaja con e^x , $\ln x$ o $\arctg x$ en su dominio.

Entonces: $\lim_{x \rightarrow \infty} e^x = \infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$, $\lim_{x \rightarrow \infty} \ln x = \infty$, $\lim_{x \rightarrow \infty} \arctg x = \frac{\pi}{2}$ y $\lim_{x \rightarrow -\infty} \arctg x = -\frac{\pi}{2}$.

FÓRMULAS Y TÉCNICAS

Fórmula o técnica	Cuándo se usa	Arquetipo
Dividir numerador y denominador por la mayor potencia de x del denominador	Cociente de polinomios	1.7-G1
$\sqrt{x^2} = x $ y conjugado	Radicales o $\infty - \infty$	1.7-G2
Dividir por la exponencial dominante; usar los límites de e^x , $\ln x$ y $\arctan x$	Exponenciales, logaritmos o arcotangente	1.7-G3
División de polinomios: $f(x) = mx + b + \frac{R(x)}{D(x)}$ con grado de R menor que grado de D	Asíntota oblicua	1.7-G4

REPRESENTACIÓN



Una función puede tener dos asíntotas horizontales distintas (como $\arctan x$) o una asíntota oblicua (como $\frac{x^2+1}{x-1}$, con $y = x+1$).

⚠ ERRORES COMUNES

- Pensar que $\infty - \infty = 0$: es una forma indeterminada.
- Escribir $\sqrt{x^2} = x$ cuando $x \rightarrow -\infty$: allí $\sqrt{x^2} = |x| = -x$.
- Creer que la gráfica nunca cruza una asíntota horizontal: puede cruzarla (por ejemplo, $\frac{\sin x}{x}$ cruza $y = 0$ infinitas veces).
- Analizar solo $x \rightarrow \infty$ y olvidar $x \rightarrow -\infty$.

Practica con

- 1.7-G1 Límite al infinito de una función racional
- 1.7-G2 Límite al infinito con radicales
- 1.7-G3 Límite al infinito con exponenciales, logaritmos o arcotangente
- 1.7-G4 Hallar asíntotas horizontales y oblicuas
- 1-I2 Análisis completo de las asíntotas de una función racional (del módulo)
- 1-A1 Interpretar un límite en un contexto (del módulo)