

1.6

Límites infinitos y asíntotas verticales

IDEA CENTRAL

A veces, al acercarse x a un número a , la función no se acerca a ningún valor: crece (o decrece) sin cota. Ese comportamiento se escribe con ∞ o $-\infty$ y se ve en la gráfica como una recta vertical a la que la curva se acerca cada vez más.

DEFINICIONES

Límite infinito

Sea f definida en un intervalo abierto que contiene a a , excepto quizá en a . La expresión $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ significa que $f(x)$ se hace tan grande como se quiera tomando x suficientemente cerca de a , con $x \neq a$. Formalmente: para todo $M > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $0 < |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) > M$. Para $-\infty$ se pide $f(x) < -M$; para los laterales se cambia $0 < |x - a| < \delta$ por $a < x < a + \delta$ (derecha) o por $a - \delta < x < a$ (izquierda).

Asíntota vertical

La recta $x = a$ es una asíntota vertical de la gráfica de f si **al menos uno** de los límites laterales de f en a es ∞ o $-\infty$.

TEOREMAS Y PROPIEDADES

Forma $L/0$

Si: por un lado de a (izquierda o derecha): $N(x) \rightarrow L$ con $L \neq 0$, $D(x) \rightarrow 0$, y $D(x)$ no se anula y tiene signo constante en ese lado, cerca de a .

Entonces: por ese lado, $\frac{N(x)}{D(x)} \rightarrow \infty$ si L y $D(x)$ tienen el mismo signo, y $\frac{N(x)}{D(x)} \rightarrow -\infty$ si tienen signos distintos.

⚠ Si también $N(x) \rightarrow 0$, la forma es $0/0$: no es este caso.

Límite infinito bilateral

Si: $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \infty$ (o ambos son $-\infty$).

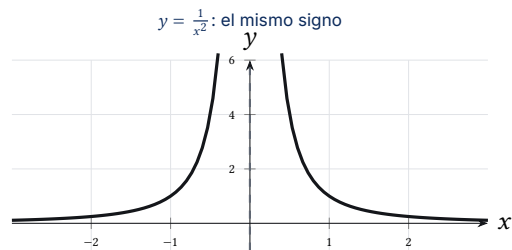
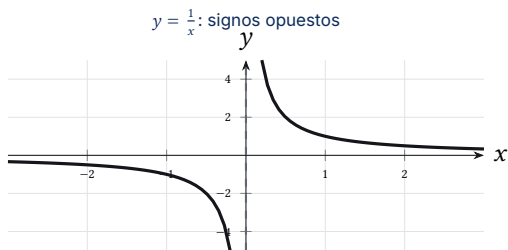
Entonces: se escribe $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ (o $-\infty$).

⚠ Es una notación: el límite no existe como número real. Si los laterales son infinitos de signo distinto, se da cada lateral por separado y no se escribe ningún valor para el límite bilateral.

FÓRMULAS Y TÉCNICAS

Fórmula o técnica	Cuándo se usa	Arquetipo
Análisis de signos de N y D a cada lado de a	Forma $L/0$ con $L \neq 0$	1.6-G1
Candidatos: ceros del denominador; $\ln u$ cuando $u \rightarrow 0^+$; $\operatorname{tg} x$ en $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ (k entero)	Buscar asíntotas verticales	1.6-G2
Simplificar antes de decidir (hueco o asíntota)	Denominador que se anula	1.6-G2

REPRESENTACIÓN



Con $\frac{1}{x}$ (potencia impar) los dos lados tienen signos opuestos; con $\frac{1}{x^2}$ (potencia par), el mismo signo.

⚠ ERRORES COMUNES

- Escribir $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ y decir que «el límite existe»: ∞ no es un número, describe un comportamiento.
- Confundir un **hueco** con una asíntota vertical: si al simplificar el factor $(x - a)$ desaparece del denominador, en $x = a$ hay un hueco, no una asíntota.
- Olvidar que con $(x - a)$ elevado a una potencia impar los dos lados tienen signos opuestos (y con potencia par, el mismo).

Practica con

- 1.6-G1 Límite cuando el denominador se anula y el numerador no
- 1.6-G2 Hallar las asíntotas verticales de una función
- 1-I2 Análisis completo de las asíntotas de una función racional (del módulo)