

1.5

Definición formal de límite (ε - δ)

IDEA CENTRAL

La definición ε - δ convierte «tan cerca como se quiera» en una promesa precisa: para cualquier tolerancia $\varepsilon > 0$ alrededor de L , existe una distancia $\delta > 0$ alrededor de a que la garantiza.

DEFINICIONES

Definición ε - δ

Sea f definida en un intervalo abierto que contiene a a , excepto quizá en a . Se dice que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$0 < |x - a| < \delta \implies |f(x) - L| < \varepsilon.$$

ε mide la cercanía en el eje y ; δ , la cercanía en el eje x . La condición $0 < |x - a|$ excluye $x = a$: por eso el límite no depende de $f(a)$.

Otras definiciones formales

Lateral (f definida en (a, c)): $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$ si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $a < x < a + \delta \implies |f(x) - L| < \varepsilon$. Por la izquierda (f definida en (c, a)), igual con $a - \delta < x < a$.

Límite infinito (M - δ ; f definida como en la definición ε - δ): $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ si para todo $M > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $0 < |x - a| < \delta \implies f(x) > M$. Para $-\infty$ se pide $f(x) < -M$.

Límite al infinito (ε - N ; f definida en un intervalo (c, ∞)): $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$ si para todo $\varepsilon > 0$ existe un número N tal que $x > N \implies |f(x) - L| < \varepsilon$. Para $x \rightarrow -\infty$, igual con $x < N$.

TEOREMAS Y PROPIEDADES

Caso lineal

Si: $f(x) = mx + b$ con $m \neq 0$, a es un número real y $L = ma + b$.

Entonces: para cada $\varepsilon > 0$, el valor $\delta = \frac{\varepsilon}{|m|}$ cumple la definición de $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$.

△ Se comprueba así: si $0 < |x - a| < \delta$, entonces $|f(x) - L| = |m||x - a| < |m|\delta = \varepsilon$.

Un δ más pequeño también sirve

Si: $\delta > 0$ cumple la definición para un ε dado.

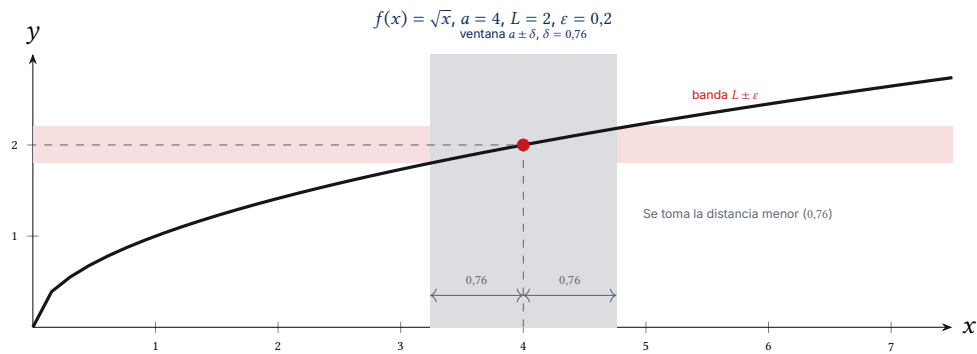
Entonces: cualquier δ' con $0 < \delta' < \delta$ también la cumple para ese ε .

△ Por eso, si la condición $|f(x) - L| < \varepsilon$ da un intervalo asimétrico alrededor de a , se toma como δ la distancia menor.

FÓRMULAS Y TÉCNICAS

Fórmula o técnica	Cuándo se usa	Arquetipo
Despejar $ x - a $ a partir de $ f(x) - L < \varepsilon$	ε numérico dado	1.5-G1
Suponer $ x - a < 1$, acotar el factor restante por una constante K y tomar $\delta = \min\left(1, \frac{\varepsilon}{K}\right)$	Funciones no lineales	1.5-T1
Separar borrador (buscar δ) y prueba (verificar δ)	Demostraciones	1.5-T1

REPRESENTACIÓN



Si $x \neq a$ está en la ventana $(a - \delta, a + \delta)$, simétrica alrededor de a , entonces $f(x)$ queda dentro de la banda $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$.

⚠ ERRORES COMUNES

- Hacer que δ dependa de x : solo puede depender de ε (y de a).
- Intercambiar los papeles de ε y δ : ε es dado (cualquiera) y δ es el que tú encuentras.
- En un intervalo asimétrico, tomar la distancia mayor en lugar de la menor.

Practica con

1.5-G1	Encontrar δ para un ε dado
1.5-T1	Demostrar un límite con la definición formal (ε - δ , ε - N o M - δ)
1-T3	Demostrar o refutar una afirmación general sobre límites o continuidad (del módulo)