

1.4

Límites trigonométricos

IDEA CENTRAL

Los límites trigonométricos de la forma $0/0$ no se resuelven factorizando: se reducen a un límite fundamental, $\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} u}{u} = 1$, que se demuestra con el teorema del emparedado.

DEFINICIONES

Argumento que tiende a cero

En $\operatorname{sen} u$, $\cos u$ o $\operatorname{tg} u$, u es el argumento; puede ser una expresión en x , como $u = 5x$ o $u = x - 2$. Los límites fundamentales se aplican cuando $u \rightarrow 0$.

Medida en radianes

Los límites fundamentales solo valen si el ángulo se mide en radianes.

TEOREMAS Y PROPIEDADES

Límite fundamental del seno

Si: el ángulo u se mide en radianes.

Entonces: $\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} u}{u} = 1$ y, como consecuencia, $\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} u}{u} = 1$.

⚠ En grados, el primer límite vale $\frac{\pi}{180}$.

Límite fundamental con argumento compuesto

Si: $\lim_{x \rightarrow a} u(x) = 0$ y $u(x) \neq 0$ para $x \neq a$ cerca de a (ángulos en radianes).

Entonces: $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\operatorname{sen} u(x)}{u(x)} = 1$.

⚠ El argumento del seno y el denominador deben ser la misma expresión: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} 5x}{5x} = 1$, pero $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} 5x}{x} = 5$.

Límite del coseno

Si: el ángulo u se mide en radianes.

Entonces: $\lim_{u \rightarrow 0} \frac{1 - \cos u}{u} = 0$ y $\lim_{u \rightarrow 0} \frac{1 - \cos u}{u^2} = \frac{1}{2}$.

Continuidad del seno y del coseno

Si: a es cualquier número real.

Entonces: $\lim_{x \rightarrow a} \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} a$ y $\lim_{x \rightarrow a} \cos x = \cos a$.

FÓRMULAS Y TÉCNICAS

Fórmula o técnica	Cuándo se usa	Arquetipo
Multiplicar y dividir para obtener $\frac{\operatorname{sen} u}{u}$	Aparece $\operatorname{sen} kx$ con $k \neq 1$	1.4-G1
$1 - \cos^2 u = \operatorname{sen}^2 u$ (multiplicar por $1 + \cos u$)	Expresiones con $1 - \cos u$	1.4-G1
$\operatorname{tg} u = \frac{\operatorname{sen} u}{\cos u}$	Expresiones con tangente	1.4-G1
Cambio de variable $u = x - a$	$x \rightarrow a$ con $a \neq 0$: el argumento tiende a 0 solo después de trasladar	1.4-G1

⚠ ERRORES COMUNES

- Simplificar $\frac{\operatorname{sen} 5x}{x}$ como $\operatorname{sen} 5$: el seno no es un factor que se pueda cancelar.
- Trabajar en grados.
- Aplicar $\frac{\operatorname{sen} u}{u} \rightarrow 1$ cuando u no tiende a 0: por ejemplo, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 0$, no 1.

Practica con

1.4-G1 Límite que se reduce a $\frac{\operatorname{sen} u}{u}$ o a $\frac{1 - \cos u}{u}$