

1.3

Cálculo algebraico de límites: leyes y formas indeterminadas $0/0$

IDEA CENTRAL

Si la función es continua en a , el límite es simplemente $f(a)$. Cuando al sustituir aparece una forma indeterminada como $0/0$, todavía no hay respuesta: hay que transformar la expresión, sin cambiar sus valores para $x \neq a$, hasta poder sustituir.

DEFINICIONES

Forma indeterminada

Expresión como $0/0$ que aparece al sustituir y cuyo valor **no** puede decidirse sin más análisis: el límite puede ser cualquier número, ∞ , $-\infty$ o no existir. En este módulo también aparecen $\frac{\infty}{\infty}$ y $\infty - \infty$.

Ejemplo: $\frac{x^2 - 9}{x - 3}$ da $0/0$ en $x = 3$, pero $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = 6$.

Funciones que coinciden salvo en un punto

f y g coinciden salvo en a si $f(x) = g(x)$ para todo $x \neq a$ de un intervalo abierto que contiene a a . Por ejemplo, $\frac{x^2 - 9}{x - 3}$ y $x + 3$ coinciden salvo en $x = 3$. Como el límite no depende del valor en $x = a$, sus límites en a son iguales.

TEOREMAS Y PROPIEDADES

Leyes de los límites

Si: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ y $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = M$ existen (son números reales), c es una constante y n es un entero positivo.

Entonces: $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \pm g(x)] = L \pm M$; $\lim_{x \rightarrow a} c f(x) = c L$; $\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = L M$; $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}$ si $M \neq 0$; $\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^n = L^n$;

$\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{L}$ (si n es par, se exige $L > 0$).

⚠ La ley del cociente exige $M \neq 0$. Si $M = 0$, esta ley no decide: hay que ver si la forma es $0/0$ (tema 1.3) o $L/0$ con $L \neq 0$ (tema 1.6).

Sustitución directa

Si: f es polinómica, racional, una raíz, exponencial, logarítmica o trigonométrica (o se obtiene de ellas con operaciones y composiciones), y a es un punto interior de su dominio: f está definida en todo un intervalo abierto que contiene a a .

Entonces: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

⚠ Si a es un extremo del dominio (por ejemplo, $\sqrt{x}$ en $a = 0$), solo tiene sentido el límite lateral: $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} = 0$.

Límite de funciones que coinciden

Si: $f(x) = g(x)$ para todo $x \neq a$ de un intervalo abierto que contiene a a , y $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ existe.

Entonces: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x)$.

⚠ Es lo que justifica «cancelar» el factor $(x - a)$: la simplificación solo es válida para $x \neq a$, y eso basta.

Teorema del emparedado

Si: $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ para todo $x \neq a$ de un intervalo abierto que contiene a a , y $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = L$.

Entonces: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$.

⚠ Las dos cotas deben tener el mismo límite; si no, el teorema no dice nada.

FÓRMULAS Y TÉCNICAS

Fórmula o técnica	Cuándo se usa	Arquetipo
Sustituir $x = a$	Siempre, como primer paso	1.3-G1
Leyes de los límites con valores dados	No hay fórmulas: solo se conocen $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$	1.3-G2
Factorizar y cancelar $(x - a)$	0/0 con polinomios	1.3-G3
Conjugado: $(\sqrt{u} - b)(\sqrt{u} + b) = u - b^2$	0/0 con raíces	1.3-G4
Común denominador	0/0 con fracciones dentro de fracciones, o $\infty - \infty$ entre fracciones	1.3-G5
Cotas: $-1 \leq \sin u \leq 1$ y $-1 \leq \cos u \leq 1$	Función acotada multiplicada por otra que tiende a 0	1.3-G6

⚠ ERRORES COMUNES

- Decir que 0/0 «vale 0» o «vale 1»: es una forma indeterminada, no un número.
- Cancelar términos que **suman**: solo se cancelan factores que multiplican. Por ejemplo, $\frac{x+3}{x}$ no es igual a 3.
- Aplicar la ley del cociente cuando el límite del denominador es 0.
- Usar una técnica sin sustituir antes: la forma que aparece decide la técnica.

Practica con

- 1.3-G1** Límite por sustitución directa
- 1.3-G2** Límite de una combinación de funciones cuyos límites se conocen
- 1.3-G3** Forma 0/0 con polinomios: factorizar
- 1.3-G4** Forma 0/0 con radicales: racionalizar
- 1.3-G5** Forma 0/0 con fracciones: común denominador
- 1.3-G6** Teorema del emparedado