

1.2

Límites laterales

IDEA CENTRAL

A veces la función se comporta distinto a cada lado de a . Los límites laterales miran cada lado por separado, y el límite existe solo si los dos lados se ponen de acuerdo.

DEFINICIONES

Límites laterales

Por la izquierda. Sea f definida en un intervalo (c, a) , con $c < a$. La expresión $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L$ significa que $f(x)$ se puede hacer tan cercano a L como se quiera tomando x suficientemente cerca de a , con $x < a$.

Por la derecha. Sea f definida en un intervalo (a, c) , con $c > a$. La expresión $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$ significa lo mismo, pero con $x > a$.

Funciones con cambio de fórmula

Por tramos: una fórmula distinta a cada lado de un punto.

Valor absoluto: $|u| = \begin{cases} u & \text{si } u \geq 0 \\ -u & \text{si } u < 0 \end{cases}$

Parte entera: $\llbracket x \rrbracket = n$ si $n \leq x < n + 1$, con n entero; es decir, $\llbracket x \rrbracket$ es el mayor entero menor o igual que x .

TEOREMAS Y PROPIEDADES

Criterio de existencia del límite

Si: f está definida en un intervalo abierto que contiene a a , excepto quizá en a , y $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$.

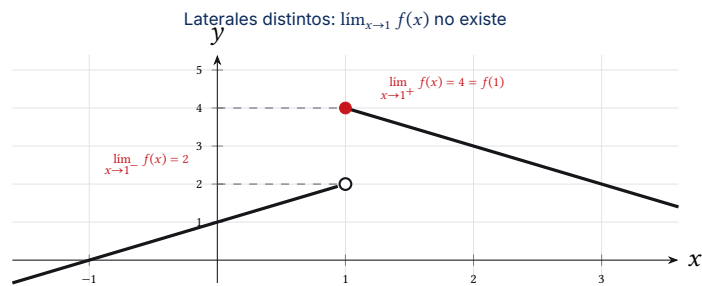
Entonces: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$. Y al revés: si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$, los dos límites laterales existen y valen L .

⚠ Si los laterales son distintos, o alguno no existe, el límite (bilateral) no existe.

FÓRMULAS Y TÉCNICAS

Fórmula o técnica	Cuándo se usa	Arquetipo
Reescribir $ \cdot $ y $\llbracket \cdot \rrbracket$ por tramos	Antes de calcular laterales	1.2-G1
Calcular cada lateral con la fórmula de su lado	Punto donde cambia la fórmula	1.2-G1
Comparar laterales para probar que el límite no existe	Demostraciones	1-T1

REPRESENTACIÓN



Por la izquierda $f(x)$ se acerca a 2; por la derecha, a 4. El límite en $x = 1$ no existe.

⚠ ERRORES COMUNES

- Usar la fórmula del lado equivocado.
- Olvidar el signo menos: para $x < a$, $|x - a| = -(x - a)$.
- Usar el valor $f(a)$ para calcular un límite lateral: los laterales, igual que el límite, no dependen de $f(a)$.

Practica con

- 1.2-G1** Límite en un punto donde cambia la fórmula
- 1-T1** Demostrar que un límite no existe (del módulo)